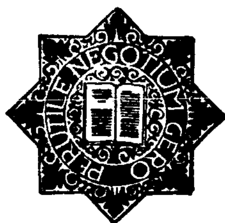
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

12e JAARGANG 1935/36, Nr. 5.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

tegen zulk een gebruik niet op. Als een recht pad te smal is om twee personen te veroorloven, naast elkaar te loopen, zijn zij gedwongen achter *„elkaar"* te loopen; als de beschikbare ruimte te klein is, dan dat men pakken naast elkaar neer kan zetten, kan men probeeren ze op *„elkaar"* te stapelen. Het komt mij ongewenscht voor, dat de wiskundige taal zich zulk eene vrijheid veroorlooft. Want als men in de wiskunde iets beweert, moet men dat gewoonlijk ook bewijzen, en als men bij voorbeeld zou beweren, dat twee cirkels binnen elkaar liggen, zou men moeten bewijzen, dat de eerste binnen den tweeden en tevens de tweede binnen den eersten ligt, wat natuurlijk onmogelijk is. Terloops zij hierbij opgemerkt, dat als eene betrekking niet wederkeerig is, die niet-wederkeerigheid evengoed behoort te worden geformuleerd en bewezen. Als het verschil der stralen van twee cirkels grooter is dan de afstand der middelpunten, ligt de cirkelomtrek met den kleinsten straal binnen dien met den grootsten, en de laatste buiten den eersten. Formuleering en bewijs van het laatste gedeelte dezer stelling ontbreken gewoonlijk.

§ 48. *Meetbaar en onmeetbaar.* In jaargang III van het Bijvoegsel van het N. T. v. W., bladzijde 96—97 heeft Dr. Dijksterhuis uitvoerige beschouwingen gewijd aan de termen meetbaar, onmeetbaar, rationaal en irrationaal. Daarin wordt betoogd, dat de uitdrukking (ir)rationaal de voorkeur verdient boven (on)meetbaar, en ook boven (ir)rationeel. De term irrationeel beteekent namelijk buiten de wiskunde zoo iets als onredelijk, terwijl (on)meetbaar het bezwaar heeft, niet te laten hooren, dat men met een relatief begrip te doen heeft. Dat dit laatste bezwaar voor (ir)rationaal niet geldt, zet Dr. Dijksterhuis t. a. p. op historische en etymologische gronden uiteen.

De woorden *symmetrisch en asymmetrisch* beteekenden oorspronkelijk onderling meetbaar en onderling onmeetbaar (*συμμετρος* en *ἀσυμμετρος*); deze oorspronkelijke beteekenis is duidelijk aan de woorden te zien, en er zou dus veel voor te zeggen zijn, haar hun terug te geven, en te gaan spreken van symmetrische en asymmetrische lijnstukken. Dit zal echter wel niet mogelijk zijn, daar de hedendaagsche beteekenis van het woord symmetrisch zoo vast aan dit woord verbonden is.

§ 49. *Raaklijnenveelhoek.* Onder een raaklijnenveelhoek verstaat men een veelhoek, waarvan de zijden raken aan een cirkel.

Nu zijn de zijden van een veelhoek lijnstukken, en het raken van een lijnstuk aan een cirkel wordt gewoonlijk niet gedefinieerd. Men kan zeggen: een lijnstuk raakt aan een cirkel, als het ligt op eene raaklijn aan dien cirkel, en men kan bovendien eischen, dat het raakpunt een punt van het lijnstuk is. Het is noodzakelijk, dat men duidelijk aangeeft, welke definitie men wenscht te aanvaarden. Kiest men de eerste, dan is bij voorbeeld de stelling, dat de sommen der overstaande zijden van een raaklijnenvierhoek congruent zijn, onjuist.

§ 50. *Omcirkelen.* Het werkwoord cirkelen voor: een cirkel beschrijven is mij steeds bijzonder onsympathiek geweest. Eene uitdrukking als: „lijnstuk $\overline{AB}$ omcirkelen vanuit A" is voor mijn gevoel echte schooljongenstaal. Eene lengte (dat is een getal) omcirkelen, zooals de Woordenlijst vermeldt, is echter bepaald onzin.

§ 51. *Oppervlakte en oppervlak.* Het gewone spraakgebruik in de meetkunde is zoo, dat tweedimensionale varieteiten in de driedimensionale ruimte worden aangeduid door de benaming *oppervlak* (of vlak), terwijl een getal, dat aan zulk eene varieteit of een deel ervan wordt toegevoegd, zoowel oppervlak als *oppervlakte* wordt genoemd. Er is, dunkt mij, niets tegen, voor deze getallen het woord oppervlakte te reserveeren. Het woord „oppervlakte" wordt in de wiskunde voor de varieteiten nooit gebruikt, in het dagelijksch leven wel (wateroppervlakte, onder de oppervlakte).

Het woord „vlakte" is een aardrijkskundige term, en wordt in de wiskunde niet gebruikt. Het komt mij dan ook voor, dat het veel gebruikte woord *vlakte-eenheid* (in plaats van oppervlakte-eenheid) een germanisme is (Flächeneinheit; merkwaardig genoeg spreekt de „doorsneehollander" nog niet van vlakte*n*eenheid).

§ 52. Het gebruik van het voorzetsel „tot" in uitdrukkingen als „vierde evenredige tot drie gegeven lijnstukken" lijkt mij slecht Nederlandsch; het woord tot behoort m. i. te worden vervangen door „van" of door „bij".

§ 53. *Vlak, plat vlak.* Het Nederlandsch kent geen naam voor het tweedimensionale analogen van een lijnstuk; een begrensd deel van een plat vlak. Dit gemis wordt doorgaans niet sterk gevoeld,

omdat men in vele gevallen gebruik kan maken van de benamingen voor bijzondere gevallen, als veelhoek, parallelogram, driehoek, cirkel. Heeft men eene algemeene benaming noodig, dan zou men het naar analogie van lijnstuk gevormde woord *vlakstuk* kunnen gebruiken, of nog beter, zooals hier en daar reeds geschiedt, onderscheid kunnen maken tusschen vlakstuk (hoekgebieden, strooken) en vlakdeel (veelhoeken, cirkelgebieden, enz.).

Het komt mij voor, dat invoering van een dezer termen in sommige gevallen vermijding van dubbelzinnigheid ten gevolge kan hebben. Onder „grondvlak" eener pyramide wordt nu eens verstaan een der begrenzende veelhoeken, dan weer het vlak waarin deze veelhoek ligt. Als men in het eerste geval zou spreken van „grondvlakdeel" of van „grondveelhoek", zou men de ligging van punten in het grondvlak op korte en eenvoudige manier kunnen aanduiden.

Een enkele maal zou er misschien aanleiding kunnen zijn, termen „oppervlakstuk" en „oppervlakdeel" in te voeren.

§ 54. *Vlak door lijn.* In § 45 is reeds gesproken over de verzwakking van de beteekenis der voorzetsels in de wiskundige taal; het is merkwaardig, hoe vaak beginnende leerlingen de uitdrukking „een vlak gaat door eene lijn" opvatten als: een vlak heeft één punt met eene lijn gemeen. Aanleiding tot wijziging van de terminologie zie ik hierin niet.

§ 55. In de Woordenlijst staat: „een deel van een vlak *uitbreiden, verlengen.* Den overgang van een vlakstuk naar het vlak waarvan het deel uitmaakt, aan te duiden door het woord „verlengen", lijkt mij bijzonder ongewenscht, tegen „uitbreiden" zie ik daarentegen geen bezwaar. Evenzoo lijkt mij de benaming „uitbreiding" van een vlakstuk of half vlak verre te verkiezen boven „verlengde".

§ 56. *Hoek van twee kruisende lijnen.* De Woordenlijst spreekt van hoek „van" of „tusschen" twee kruisende lijnen, den hoek, welke twee kruisende lijnen met elkaar vormen, den hoek waaronder twee rechten elkaar kruisen. Hierbij kan men opmerken, dat kruisende lijnen geen hoek vormen, en dat er zeker geen hoek „tusschen" twee kruisende lijnen ligt. De tweede, en de derde zegswijze lijken mij dus verwerpelijk; tegen de eerste en de laatste zie ik geen bezwaren.

§ 57. *Congruentie en symmetrie in de stereometrie.* Volgens het

gewone spraakgebruik zijn in de vlakke meetkunde gelijk en gelijkvormig en congruent synoniem; men duidt door deze woorden aan, dat twee figuren tot bedekking kunnen worden gebracht, of dat de elementen (zijden en hoeken) paarsgewijze „gelijk" zijn. Deze twee eigenschappen vallen in de vlakke meetkunde samen, mits men bij het tot bedekking brengen bewegingen buiten het platte vlak toelaat. In de stereometrie is dit niet meer het geval, zoodat men twee verschillende woorden noodig heeft, een om de paarsgewijze gelijkheid van elementen aan te geven, en een om de mogelijkheid van bedekking aan te duiden. Zooals bekend is, gebruikt men voor het eerste den term gelijk en gelijkvormig, voor het tweede het woord congruent. Dit heeft het ongewenschte gevolg, dat twee woorden, die in een gedeelte der meetkunde synoniem zijn, in een ander gedeelte verschillende beteekenissen hebben. Men kan dit vermijden, door in beide gedeelten te spreken van *rechtstreeksche* of *directe congruentie* en van *symmetrie*. — Het onderscheid tusschen beide begrippen kan in de meetkunde trouwens gemist worden, bij mijn onderwijs gebruik ik het nooit. Dat het zooveel gebruikt wordt, is een gevolg van het feit, dat men het noodig acht, zelfs in de vierde klasse der hoogere burgerschool nog schijnbewijzen door superpositie te geven. Bij kinematische toepassingen is het onderscheid natuurlijk van groot belang.

§ 58. *Prisma.* De begrenzing van een prisma bestaat uit een aantal parallelogrammen, gelegen in vlakken van een prismatischen koker, en twee congruente drie- of veelhoeken, gelegen in twee evenwijdige vlakken. Men vindt deze gewoonlijk aangeduid als opstaande zijvlakken, en grond- en bovenvlak. Deze benamingen lijken mij in meer dan een opzicht ongerechtvaardigd. „Opstaand" suggereert eene bepaalde ligging t.o.v. horizontale vlakken, „grondvlak" eveneens, en hiermee verlaat men het gebied der meetkunde, om gebruik te gaan maken van kosmographische begrippen. Ook is het minder gewenscht, twee gelijkwaardigen vlakken verschillende namen te geven. Men kan tot eene betere terminologie voor de prismata en pyramiden komen door de in onbruik gerakende benaming *„mantel"* weer in te voeren. Bij een prisma zou ik willen spreken van *mantelvlakken, mantelribben, manteloppervlakte,* tegenover *eindvlakken (eindvlaksstukken, einddriehoeken* of *-veelhoeken), ribben in de eindvlakken, oppervlakte der eindvlakstukken,* enz.

Den afstand der eindvlakken zou men den naam „hoogte" kunnen laten behouden.

Bij de parallelepipeda vervallen deze onderscheidingen, men kan er slechts spreken van paren evenwijdige zijvlakken, viertallen evenwijdige ribben, enz.

§ 59. *Pyramide.* De Woordenlijst vermeldt uitdrukkelijk als mogelijke spellingswijzen p*i*ramide en c*i*linder. Deze lijken mij afkeurenswaardig, als in strijd met de etymologie.

Bij de pyramide zou ik willen spreken van *pyramidemantel, mantelvlakken, manteldriehoeken, mantelribben* en *manteloppervlakte.* Den naam grondvlak zou ik willen behouden; de pyramide heeft namelijk een zijvlak dat eene uitzonderingspositie bekleedt.

Wanneer men de definitie van pyramide zoo geeft, dat ook de viervlakken onder de pyramiden behooren, kan men spreken van eene *driezijdige pyramide.* De naam *viervlak* lijkt mij echter verre te verkiezen, omdat de vier zijvlakken van een viervlak gelijkwaardig zijn, en er geen aanleiding is, een onderscheid te maken tusschen grondvlak en mantel, en dat onderscheid is aan de benaming pyramide verbonden.

Onder de regelmatige pyramiden komt ook eene driezijdige voor; hier heeft men een voorbeeld van een viervlak, waarvan een der zijvlakken eene uitzonderingspositie bekleedt, waarbij dus aanleiding bestaat, om onderscheid te maken tusschen grondvlak en mantel, en waar de pyramidebenamingen dus op haar plaats zijn. Zooals bekend is, wordt deze figuur *„regelmatige driezijdige pyramide"* genoemd, wat ook in zooverre juist is, dat de figuur eene pyramide is, die de eigenschappen heeft van driezijdig te zijn en van regelmatig te zijn. Maar nu doet zich eene bekende moeilijkheid voor, die vóór de leerlingen de oorzaak van vele vergissingen wordt. „Driezijdige pyramide" en „viervlak" zijn synoniem, en wel, zooals dat in de wiskundige taal gebruikelijk is, volkomen synoniem. Zet men voor deze *volkomen synonieme* uitdrukkingen *hetzelfde* bijvoeglijk naamwoord „regelmatig", dan krijgt men twee termen, die *verschillende* figuren aanduiden. Dit is een zeer dwaze toestand, en men kan het den leerlingen mijns inziens niet kwalijk nemen, als zij fouten maken bij het gebruiken van eene zoo onlogische terminologie. Het lijkt mij intusschen niet zoo eenvoudig, hierin verbetering te brengen. Het eenige, wat men zou kunnen doen, is m.i. in plaats

van *regelmatige driezijdige pyramide* te schrijven *driezijdige regelmatige* pyramide, om aldus aan te geven, dat men het heeft over het driezijdige lid van de familie der regelmatige pyramiden.

Daar men de namen „oktaëder", „hexaëder", enz. slechts gebruikt voor regelmatige veelvlakken, lijkt het mij verstandig, het woord „tetraëder" te reserveeren voor het regelmatige viervlak.

§ 60. *Afgeknot.* Over de benamingen, waarin het woord „afgeknot" optreedt, heb ik reeds eenige opmerkingen gemaakt in mijn boven (§ 36) geciteerd artikel (Bijvoegsel van het N. T. v. W., I, bladzijde 87). Ik heb daar betoogd, dat het woord „afgeknot" niet als attribuut bij „prisma" of „pyramide" mag worden opgevat, omdat een afgeknot prisma geen prisma is, en eene afgeknotte pyramide geen pyramide. Men zou op die manier een vierhoek een afgeknotten driehoek kunnen noemen. De benamingen zijn dus ongeschikt.

Professor Schuh heeft dit laatste bestreden. In Euclides IV, op bladzijde 203 schrijft Z. H. G.: „Men behoeft dit [dat is correctheid van uitdrukkingswijze, vooral bij het geven van definities] echter m.i. niet te overdrijven door zich te veel op taalkundig standpunt te stellen. Een uitdrukking, ook al is die taalkundig niet juist, kan in de wiskunde gebezigd worden, als men zich maar streng aan de daar gegeven definitie houdt. Zoo is er niet veel tegen van een onbestaanbaar getal te spreken, ook al is daarmede niet bedoeld een getal, dat niet bestaat. Bij de uitdrukking „afgeknot prisma" behoeft men er zich niet druk om te maken, dat dit geen prisma is, zoo men slechts „afgeknot prisma" als één naam opvat."

Theoretisch lijkt mij weinig in te brengen tegen Prof. Schuh's standpunt, dat men naar ik meen aldus kort kan formuleeren: het is onverschillig, door welke combinaties van klanken of teekens men een bepaald begrip aanduidt, mits men in het gebruik dezer combinaties van klanken of teekens consequent blijft. Maar practisch is het een voordeel, als de terminologie kan worden begrepen en doorzien, omdat dan het begrip te hulp kan komen, als de beteekenissen van combinaties van klanken of teekens moeten worden aangeleerd of onthouden. Dit voordeel voelt men des te sterker, naarmate men met jongere leerlingen te doen heeft en daarom is eene logische terminologie iets van meer didaktisch dan wetenschappelijk belang.

Het is intusschen verre van gemakkelijk, betere benamingen voor de afgeknotte figuren te bedenken. Men kan een aanknoopingspunt zoeken in de omstandigheid, dat afgeknotte pyramiden en afgeknotte kegels twee evenwijdige eindvlakken hebben; als men nu alle figuren met twee evenwijdige eindvlakken *schijven* noemt, zou men kunnen spreken van pyramideschijf en kegelschijf, en deze benamingen zouden naast den reeds bestaanden term bolschijf geen slecht figuur maken. Het afgeknotte prisma heeft juist twee niet-evenwijdige eindvlakken, en is dus geen schijf; de nieuwe terminologie zou dus meteen het nadeel missen, een schijn van gelijksoortigheid te geven aan figuren, die geen gemeenschappelijke eigenschappen hebben. Wanneer het woord prismoide niet reeds eene algemeen aanvaarde beteekenis had, zou het mij een geschikte naam voor het afgeknotte prisma lijken, want deze figuur heeft meer recht op een naam, die „prisma-achtig" beteekent, dan het veelvlak, dat men tegenwoordig als prismoide aanduidt. Het is echter natuurlijk ondoenlijk, den naam prismoide thans nog aan een ander veelvlak te geven. De heer Van Dijk te Leeuwarden heeft in een brief naar aanleiding van mijn artikel in Jaargang I voor afgeknot prisma den naam „restprisma" voorgesteld; ik zou liever „prismarest" zeggen. Aanvaardt men dit niet, dan zit er m.i. niet anders op, dan, zooals Prof. Schuh wil, den term afgeknot prisma te beschouwen als één woord, dat met prisma niets dan de klank gemeen heeft. Men moet de beide deelen van dit woord dan niet door adjectieven gaan scheiden, en dus niet, zooals de leerboeken, spreken van afgeknot driezijdig prisma. Van dit standpunt beschouwd is de zegswijze der leerboeken: „recht afgeknot prisma" juist, en de door Ir. Kruytbosch in een eindexamenvraagstuk aangebrachte wijziging tot „afgeknot recht prisma" verwerpelijk.

(*Wordt vervolgd.*)

INGEKOMEN BOEKEN.

Van Julius Springer, Berlijn:

Prof. Dr. J. F. KOKSMA, *Diophantische Approximationen;* 125 blz. en 28 blz. Literaturverzeichnis . . . . . R M. 18.40

Levin en Munksgaard, Kopenhagen:

Dr. L. C. DUE, *Die Brückenverbindungstheorie und ihre Anwendung zur Klasseneinteilung und Klassenzusammensetzung quadratischer Irrationalzahlen und binärer quadratischen Formen,* 39 blz. . . Deense Kr. 4.50

Van P. Noordhoff, Groningen:

Prof. Dr. F. SCHUH, *Supplement 1931* (slot)—1935 op het tweede deel van de Vraagstukken over Differentiaal- en integraalrekening en over Analytische meetkunde en Beschrijvende meetkunde, in het bijzonder met het oog op het examen *Wiskunde K V* blz. 467—514 *f* 1,50

Met de verschijning van dit supplement is de verzameling opgaven geheel compleet; de enige, die er bestaat. Aan het eind is een systematische indeling gegeven van alle K V vraagstukken 1922—1935 volgens de onderdelen van de vier vakken, waarin geëxamineerd wordt. Voor candidaten K V absoluut onmisbaar.

COMPOSITIO MATHEMATICA, Volumen 3, fasciculus 1 (9 III 1936); inhoud van dit nummer:

J. A. Schouten (Delft) en J. Haantjes (Delft) Zur allgemeinen projectiven Differentialgeometrie, blz. 1—31.

St. Cohn—Vossen (Moskau) Der approximative Sinussatz für kleine Dreiecke auf krummen Flächen blz. 32—54.

J. J. Stoker, Pittsburgh (Penn. U.S.A.) Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen im dreidimensionalen Raume, blz. 55—88.

André Marchand (Marseille). Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leur intégrales, blz. 89—127.

Dr. H. J. E. BETH en Dr. P. J. VAN LOO, *Mechanica voor het M. O. met vraagstukken, 2e druk,* 172 blz., 95 fig. gebonden *f* 2,50

Inhoud: Wiskundige inleiding — Kinematica van het stoffelijk punt — Krachten, die op een stoffelijk punt werken — Krachten, die op een vast lichaam werken — Statica van het stoffelijke punt — Dynamica van het stoffelijke punt — Arbeid en arbeidsvermogen — Krachten, die werken op een vast lichaam.

P. REIJNDERS, *Stereometrie voor het M. T. O.,* 122 blz. 157 fig. ingen. *f* 1.75, gec. . . . . *f* 2,10

De gewone Stereometrie van de H.B.S. 5 j. c, met weglating van drievlakshoek, boldriehoek, orthocentrisch viervlak en bekorting van enkele onderdelen en van de reeksen vraagstukken. Opgenomen zijn daarentegen eenvoudige beschouwingen over cylinder- en kegeldoorsnijdingen, over vectoren en zwaartepunten.

UIT HET VERSLAG VAN DE STAATSEXAMEN-COMMISSIE 1935.

De subcommissie voor de *wiskunde* heeft met genoegen opgemerkt, dat de A-candidaten dit jaar, in tegenstelling tot de drie voorafgaande jaren, zoowel in stelkunde als in meetkunde in meerderheid voldoende cijfers hebben behaald. Deze vooruitgang blijkt ook uit de gemiddelde cijfers; deze waren dit jaar voor stelkunde en meetkunde onderscheidenlijk 5.31 en 5.27, het vorig jaar 4.95 en 4.83. Toch was het aantal der niet voldoende examens in stelkunde en meetkunde nog vrij groot, respectievelijk 88 en 89. Voor beschouwingen van algemeeneren aard verwijzend naar vorige verslagen, wenscht de subcommissie naar aanleiding van de examens der A-candidaten nog enkele bijzondere opmerkingen te maken.

Eenvoudige vraagstukken over vierkantsvormen leverden aan vele candidaten moeilijkheden op. Het kwam nog steeds voor, dat men moeite had met het bepalen van de waarden van x, waarvoor $(x + 3)$ $(x — 4)$ negatief is, en met het bepalen van de uiterste waarde van een vierkantsvorm. Termen als volkomen vierkant en discriminant schenen af en toe onbekend te zijn. Grafische voorstellingen waren soms in het geheel niet bestudeerd, soms met een te groote beperking. Een enkele candidaat had nooit van de reststelling gehoord; anderen, die haar wel konden toepassen bij vraagstukken, wisten haar niet te formuleeren of te bewijzen.

Een opgave als het construeeren van een lijn, die door een gegeven punt gaat en twee gegeven kruisende lijnen loodrecht kruist, behoord gevraagd te kunnen worden. Het berekenen van den straal van den ingeschreven bol van een regelmatig viervlak met gegeven ribbe was voor enkele candidaten te lastig. Dat een candidaat niet wist, hoe groot de inhoud van een prisma is, klinkt ongelooflijk. Het is voorgekomen, dat men niet precies wist wat een viervlak

was; zelfs, dat men examen kwam doen zonder bestudeerd te hebben......... de stereometrie!

Met leedwezen heeft de subcommissie vastgesteld, dat dit jaar de B-candidaten evenals het vorig jaar en in tegenstelling tot enkele hieraan voorafgaande jaren in alle onderdeelen in meerderheid cijfers beneden voldoende hebben behaald. Dat 5 van de 31 examens in stelkunde, 4 van de 28 in meetkunde en 8 van de 31 in trigonometrie en analytische meetkunde met een lager cijfer dan 4 gewaardeerd moesten worden, wijst er wel op, dat vele B-candidaten òf na onvoldoende voorbereiding òf zonder de noodige capaciteiten examen kwamen doen. Bijzondere ervaringen, die ook hierop schijnen te wijzen, zijn de volgende.

Vragen over de grafische voorstelling van $y = ax^2 + bx + c$ en het teeken van $(x^2 - 2x)(x + 1)$ gaven soms moeilijkheden. Een candidaat meende, dat uit $\log a = 2$ moest volgen $a = \sqrt{2}$, en wist ook niet $\log 1/10$ te bepalen. Dat men het begrip logarithme niet kon definieeren, kwam meer dan eens voor. Ook is het voorgekomen, dat men niet wist, welke figuur voorgesteld werd door de vergelijking $y^2 = 2x$.

De resultaten van het examen in de *natuurkunde* kunnen niet schitterend worden genoemd, als men moet vaststellen, dat van de 29 candidaten, die zich aan dit onderdeel van het examen onderwierpen, slechts 11 een voldoend cijfer konden behalen. Evenals vorige jaren, acht ook nu de subcommissie het haar plicht te wijzen op verschillende punten waarbij de candidaten tekortschoten.

In de eerste plaats dan liet de kennis van de electriciteitsleer te wenschen over. Op eenvoudige vragen als: welke energieomzetting heeft er plaats in een stroomgevend element? wanneer zullen we een galvanisch element reversibel noemen? op welke eigenschap van een electrischen stroom berust de werking van een ampèremeter? waarom kan een electromotor gaan draaien, als men er een stroom door leidt? volgens welke methoden bepaalt men gaarne weerstanden en electromotorische krachten? wat beteekent het als op een lamp staat $\left\{\begin{matrix}\text{220volt}\\ \text{100 watt}\end{matrix}\right\}$? welk is het belang van wisselstroomen? hoe kunnen gemakkelijk kathodestralen worden verkregen? welke afwijkingen ondervinden deze in magnetische en in electrostatische krachtvelden? welk verband bestaat er tusschen veldsterkte

en potentiaal? vanwaar het woord dielectricum? enz. bleven verschillende candidaten het antwoord schuldig. Waarom, mede met het oog op het oplossen van eenvoudige vraagstukjes, niet paraat te hebben dat 1 P.K. = 736 watt is, dat 1 cal = 427 K.G.M., 1 joule of 1 wattsecunde = 0.24 calorie is?

In verband met het bovenstaande was niet te verwachten, dat de leer van het licht en van het geluid door de candidaten extra was verzorgd. De subcommissie moest telkens weer uit schetsjes ervaren, dat ook in de buiken van staande golven verdichtingen en verdunningen optreden of vernemen, dat de voortplantingssnelheid van het geluid in gassen ook afhangt van den druk op grond van de formule $v = \sqrt{\frac{cp}{cv} \cdot \frac{p}{s}}$, en dat de brekingsindex van glas $^3/_4$ is, in plaats van $1^1/_2$. Soms konden eenvoudige beeldconstructies niet worden uitgevoerd, doordat de candidaat niet wist, wat een bijas is. Als de subcommissie merkte, dat het den candidaten veel moeite kostte, uit te leggen hoe een spectrum tot stand komt, hoe de chromatische aberratie van een lens kan worden gedemonstreerd en hoe men deze kan opheffen, wat eigenlijk het beginsel is bij een microscoop, een astronomischen kijker, een spiegeltelescoop enz., dan durfde zij ternauwernood vragen naar de afhankelijkheid van de stralingsenergie van een zwart lichaam als functie van de temperatuur en de golflengte, naar de verklaring van het optreden van kleuren in dunne vliezen, naar de beteekenis van een tralie, nicol enz.

Bleek men over het algemeen behoorlijk op de hoogte te zijn van de gaswetten van Boyle en Gay-Lussac, van de afleiding van het mechanisch warmte-equivalent volgens Robert Mayer, het schetsen van isothermen beneden de kritische temperatuur liet nog al eens te wenschen over, evenals de wijze, waarop de beteekenis van het geringe nuttig effect van stoommachines en Dieselmotoren werd weergegeven. Om verder niet in herhalingen te vervallen, neemt de subcommissie de vrijheid toekomstigen candidaten te adviseeren ook verslagen van vorige jaren nog eens ter hand te nemen.

Aan het slot van het verslag vinden we de volgende opmerkingen.

Gaarne wil de commissie aan het voorafgaande nog de volgende algemeene opmerkingen toevoegen.

Dat het percentage der geslaagden van 49 tot 44.5 is gedaald, is te wijten aan een achteruitgang over bijna de geheele linie. Alleen de volledige B-candidaten maken hierop een gunstige uitzondering;

hun aantal, 28, is echter te gering om een merkbaren invloed ten goede op het totaal-percentage te kunnen uitoefenen.

De achteruitgang werd wel het sterkst bevorderd door de candidaten met einddiploma H.B.S., die zich aan een der beide examens, A of B, onderwierpen. Wat de gegadigden voor diploma B betreft, dreigt het zich aanmelden zonder voldoende voorbereiding een van jaar tot jaar toenemende gewoonte te worden. En nu de candidaten voor diploma A hun B-collega's op bedenkelijke wijze ter zijde gaan streven (de uitslag van hun examens geeft dit jaar immers een daling te zien van bijna 10 pct.), meent de commissie, om tegen dezen wassenden achteruitgang stelling te nemen, nogmaals met nadruk bij Uw Excellentie er op te moeten aandringen, dat de examengelden van *f* 10 tot *f* 25 zullen verhoogd worden.

In het verslag, uitgebracht door de commissie van 1931, zijn eenige oorzaken opgesomd die, naar het oordeel der leden, het ongunstige verloop der examens van dat jaar konden verklaren, hoewel toen nog 50 pct. der candidaten het diploma verwierven. Deze oorzaken blijken nog steeds van kracht en wegen des te zwaarder, nu het percentage intusschen van 50 tot 44.5 geslonken is. Van de candidaten schijnt in dit opzicht geen verbetering te verwachten. Steeds blijven er zich aanmelden, „in 't geheel niet klaar", getuigen o.a. de 42, die zich vóór het begin van het examen terugtrokken, de 38, die denzelfden weg gingen na enkele examinatoren over hun gebrek aan kennis te hebben verbaasd, en de niet weinige anderen, die de door hen zelf en door de examinatoren genomen moeite met éénen en tweeën beloond zagen, of „slechts ten deele klaar" en in de meening, dat men het wel eens wagen kan, om dan tot de bevinding te komen, dat men, ook met zeer veel welwillendheid van den kant van de commissie, niet meer dan een „bijna voldoend" cijfer bemachtigen kan. Wel is in deze moeilijke tijden een goede opleiding voor velen bezwaarlijk te bereiken, maar des te wenschelijker wordt een middel, dat hen er van zal terughouden te verschijnen voor een commissie, die zij noodeloos lastig vallen, en zoowel 's Rijks kas als zich zelf te stellen voor uitgaven, die steeds weer blijken vergeefsch te zijn geweest.

Van de candidaten voor het volledige A-examen slaagden bijna 40 procent, een succes, dat in den lande geen afgunst verwekken zal. Wanneer wij daarbij in aanmerking nemen, dat 23 van de 181 voor alle afdeelingen van het examen een eindcijfer beneden vol-

doende behaalden en 72 in een der afdeelingen Grieksch en Latijn of in beide het eindcijfer 4 of lager verwierven, dan mag ook hierbij ongetwijfeld worden gesproken van onvoldoende voorbereiding en vaak zelfs van op goed geluk maar examen doen. In dit verband hebben de gedetailleerde verslagen der subcommissies reeds gewezen op vele tekortkomingen. Scherp treedt daarbij op den voorgrond het vernietigend oordeel, dat de subcommissie voor het Nederlandsch over de dit jaar geleverde opstellen heeft moeten uitspreken en dat, kort samengevat, luidt: „zoogoed als zonder inhoud, stuntelig van vorm, wemelend van taal- en spelfouten". Hier ligt een waardemeter ter bepaling van het gehalte der vele candidaten, die geestelijk arm, slordig en oppervlakkig misschien beter deden van verder pogen af te zien of althans hun voorbereiding voor dit examen grondig te hervormen alvorens zich opnieuw daaraan te onderwerpen; tegelijkertijd een ernstige waarschuwing voor hen, die in de toekomst langs den weg van het staatsexamen de poorten der universiteit willen binnengaan.

Van de 28 candidaten voor het volledige B-examen bleven er 6 in alle afdeelingen beneden de maat en 4 van hen behaalden in de afdeelingen V en VI het eindcijfer 4 of minder. Van de B-candidaten met einddiploma H.B.S., voor zoover zij in Latijn en Grieksch volledig zijn geëxamineerd, brachten 51 het in geen van beide talen hooger dan tot een 4, terwijl de cijfers 1 en 2 daaronder volstrekt niet tot de uitzonderingen behoorden.

SLOTWOORD VAN DE REDACTIE.

De algemene opmerkingen van de commissie zijn de bekende klanken, die jaar in jaar uit gehoord worden na elk examen, maar die blijkbaar nooit tot gevolg hebben, dat ze in volgende verstommen. Ter vergelijking laten we een lijstje van percentages volgen van geslaagden in 1933 voor verschillende examens.

		ex.	gesl.	%
I.	Nijverheidsacten			
	zonder de „vrouwelijke" acten	955	253	27
II.	Stuurman en machinist grote vaart	764	474	62
III.	Hoofdacte	2841	1243	44
IV.	Onderwijzersacte	1048	527	50
V.	Vreemde talen L.O.	2079	840	40
VI.	Wiskunde L.O.	343	96	28
VII.	Teekenen L.O.	184	116	63
VIII.	Handelskennis L.O.	221	66	30
IX.	Wiskunde enz. K I—K V	109	47	43
X.	Nederlands M.O.	62	18	29
XI.	Geschiedenis M.O.	40	18	45
XII.	Aardrijkskunde M.O.	27	21	76
XIII.	Staathuishoudkunde en Staatsinrichting M.O.	153	57	35
XIV.	Handelswetenschappen M.O.	540	96	18
XV.	Vreemde talen M.O.	616	213	35
		9982	2975	

Het percentage geslaagden is 30 (natuurlijk niet verkregen door het gemiddelde van de percentages te bepalen).

Ziet men nu de 44,5 % van de Staatsexamens, dan is dat nog zo kwaad niet. Wij menen niet ver van de waarheid te zijn, dat in het bijzonder daarbij voor Wiskunde (daarover alleen kunnen we iets zeggen) de bekende welwillendheid van de examinatoren en hun wel zeer matige eisen mede oorzaak zijn van een betrekkelijk hoog percentage geslaagden. We willen hopen, dat de „Staatscommissie" haar eisen niet verlaagt, eerder iets opvoert. Noch de Universiteit, noch de maatschappij is gediend met een nog groter toeloop van studerenden, die middelmatig zijn of onder de maat. De afgewezen candidaten zullen voor het merendeel eer gebaat dan geschaad blijken te zijn door het halt, dat hun aan het begin van een voorgenomen studie wordt toegeroepen.

In de lijst trekken een paar hoge percentages de aandacht; b.v. bij II; deze examens worden afgelegd door mannen tussen de 22 en 35 jaar na jaren practijk op zee, afgewisseld door studie aan wal voor volgende examens. Het hoge cijfer bij VII is ook duidelijk; voor die acte wordt alleen gewerkt door hen, die behoorlijke aanleg vertonen, waarvan de resultaten voor hen zelf en ieder ander zicht-

baar zijn. In de tijd, die is er ook geweest, dat „iedereen" voor tekenen werkte, waren de resultaten meer dan bedroevend.

Over XII deelde Prof. Dr. H. N. ter Veen mij mee, dat deze examens vrijwel gelijk staan met academische: tentamens, candidaats, tentamens en op het laatst examen; wie er van te voren afvielen, tellen niet mee. Bij deze gegevens is 76 % heel laag; bij universitaire examens en examens aan de hoge scholen zal het aantal van hen, die na een reeks tentamens voor doctoraal worden afgewezen, maar heel gering zijn.

Het lage cijfer van XIV is waarschijnlijk voor een deel te wijten aan geringe vooront wikkeling van de candidaten; voor een ander deel wel aan de zeer uitgezette eisen.

In het verslag over 1934 schrijft de Staatscommissie: „en daarom moeten toekomstige candidaten nog eens hooren, dat zij hun studie ernstig moeten opvatten en zich onder goede leiding stellen." Voor het eerste kunnen de candidaten zelf zorgen; een eis trouwens, die geldt voor alle werk, dat men doet. Hoe komt men echter aan de „goede leiding"? Dat is voor studerenden heel, heel moeilijk, omdat ze, studerende, nog niet critisch aangelegd kunnen zijn omtrent „goed, half of minderwaardig" van den opleider.

Een overeenkomstig geval hebben wij hier met de wiskunde nl. met de opleiding voor L.O. en K I. Er zijn bij elk examen tientallen slachtoffers van hun „opleiders"; het zal bij het Staatsexamen ook voorkomen, anders toch had de commissie niet haar waarschuwende stem laten horen. De deskundigen, zij die boven de stof staan (dat doen de studerenden natuurlijk nog niet) en die de opleiders kunnen beoordelen, kunnen hun waarschuwende stem niet verheffen tegen beunhazerij bij de „opleiding". Wij weten, dat er les wordt gegeven voor L.O. en K I door mensen, die volslagen onbekwaam zijn om de candidaten tot het examen te brengen, laat staan ze een voldoende kans van slagen te geven. Ook dit zal voorkomen bij de voorbereiding voor het Staatsexamen. Op ieder, die opleidt (van verscheidene kan men zeggen: zich werpt op de opleiding) rust de plicht, zich op de hoogte te stellen van de eisen, zoals die blijken uit de schriftelijke opgaven, de verslagen van mondelinge examens en de verslagen van de commissies [1]), die trouw na elk examen verschijnen,

[1]) Verslagen vrage men per briefkaart aan de Landsdrukkerij, Den Haag. Na enige dagen krijgt men het bestelde via de post en betaalt meteen aan de post het bedrag van 25 ct per ex. Ook zijn gewoonlijk nog verslagen van vorige jaren te verkrijgen.

steeds waardevolle gegevens en aanwijzingen bevatten en steeds weer door vele opleiders volkomen genegeerd worden.

NASCHRIFT.

Het verslag van de Commissie voor het Staatsexamen verscheen 11 Febr. 1936; het slotwoord werd direct daarna er bij geschreven. De opmerking over de „leiding" bij de wiskunde-acten vindt bevestiging in het verslag van de examens Wiskunde 1935 (Staatscourant van 15 April 1936, zie N. T. v. Wiskunde afl. V van 1 Mei); dit eindigt aldus:

Ook bleek meermalen, dat candidaten hoofd- en bijzaken niet wisten te onderscheiden, *hetgeen twijfel deed rijzen aan goede leiding.*

Nadat het lijstje van blz. 206 opgemaakt was, heb ik eens gevraagd, hoe het met de academische examens staat in Amsterdam. Van het Bureau van Statistiek ontving ik deze gegevens:

Volgens enkele door mijn Bureau gemaakte berekeningen waren van de in 1925/26 en 1926/27 voor de eerste maal in de faculteit der Rechtsgeleerdheid ingeschreven studenten tot 1 Januari 1933 45 % voor het doctoraal examen geslaagd. Voor de in de jaren 1924/25 t.m. 1927/28 voor de Economische faculteit ingeschrevenen was dit percentage op 1 October 1935 27.

Het rapport van de Commissie-Limburg over „De toekomst der academisch gegradueerden" stelt laatstgenoemd percentage op 30.

Dit rapport geeft verder voor de mannelijke studenten in de Geneeskunde een percentage afstudeerenden van 70—75, voor Tandheelkunde van 80, voor Biologie van 67, voor Letteren en Wijsbegeerte van 54, voor Veeartsenijkunde van 65.

Andere gegevens kan ik U op dit oogenblik niet verstrekken. Wel ligt het in mijn bedoeling binnenkort het studieverloop aan de Amsterdamsche universiteit voor de studiejaren 1925/26 en volgende en voor elk der faculteiten nauwkeurig te doen bewerken. Voor de andere universiteiten en hoogescholen geschiedt een dergelijke bewerking van het studiejaar 1930/31 af door het Centraal Bureau voor de Statistiek te 's-Gravenhage.

DIDACTISCHE CAUSERIEËN

DOOR

Dr. D. P. A. VERRIJP.

II.

BEHANDELING VAN DEN INHOUD DER PYRAMIDE.

Dit artikel behandel ik hier op verzoek van de redactie. Het kan als een „intermezzo" in mijn causerieën worden opgevat.

Vooraf een en ander, dat betrekking heeft op beginnende docenten of op hen, die het willen worden.

Het zal zoo ongeveer een twintig jaar geleden zijn, dat ik op een mooien zomermorgen in gesprek kwam met een jonge dame, die 't doctoraal examen in de wis- en natuurkunde had afgelegd en bezig was een proefschrift te bewerken. Toen het gesprek op het onderwijs kwam, vernam ik van haar de voor mij ontstellende opinie, dat iemand, die een behoorlijk H.B.S.-eindexamen had afgelegd, wel in staat zou zijn om onderwijs in de wiskunde te gaan geven. Ze was al eens tijdelijk werkzaam geweest en meende nu wel over ons onderwijs een bevoegd oordeel te kunnen vellen.

Het zal wel niemand van mijn ervaren oud-collega's verwonderen, dat ik haar verzocht . . . . het gesprek over dit onderwerp maar te staken en ons liever te verlustigen in het mooie weer. Ik sprak alleen nog de hoop uit, dat we veel later eens gelegenheid zouden hebben het gesprek over het onderwerp te hervatten.

Nu, een ervaring als deze zal wel een unicum [1]) zijn; zoo erg zal ze tegenwoordig — hoop ik — wel niet meer voorkomen. Maar ik zou toch mijn meening onder de aandacht willen brengen, dat het van belang is, dat inspecteurs, rectoren en directeuren, indien ze zelf in het betrokken vak niet deskundig zijn — zoolang als wij

[1]) Toch is de hulp, die — pecuniae causa — tegenwoordig vooral door jonge studenten aan zwakke leerlingen geboden wordt, een handeling, die eigenlijk op een dergelijke verkeerde opinie berust, hetzij dan van de studenten zelf of van de ouders der leerlingen.

niet hebben een opleiding volgens het plan der commissie, waarvan het rapport voorkomt in Euclides 4e jg. 1927/28 nos. 1 en 2 —, solliciteerende novitii te sturen naar ervaren docenten om daar een colloquium „docendi" te voeren. Want het kwam mij bij de sollicitatie naar de door mij verlaten betrekking toch nog éèns voor, dat ik van een sollicitant, dien ik op verzoek van den rector ontving, te hooren kreeg, dat hij het niet noodig vond om zich zoo bijzonder in didactische kwesties te verdiepen!

Laat ik echter dien jongeren een positieven raad geven: Begin zoo maar niet onvoorbereid. Schaf U b.v. aan de Encyklopädie der Elementar-Mathematik van Weber und Wellstein, het Handbuch des Mathematischen Unterrichts van Killing und Hovestadt en de Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus van Klein. Verder wensch ik ieder in het bezit van de groote — in 1898 begonnen en thans eerst afgesloten — (wel wat kostbare — ruim M. 922—) Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften en van de Historische Bibliotheek der exacte vakken van Dijksterhuis en Beth. Dat wil nu nog niet zeggen, dat ik van meening ben, dat de jonge docent dan voldoende geequipeerd is. Natuurlijk niet: hij moet tijdschriften lezen en moet leerboeken vergelijken — ook vele oudere en uitgebreidere kunnen goede diensten bewijzen; ik kom daarop wellicht nog wel eens terug —, maar hij heeft dan al vast materiaal, dat hem tot de overtuiging moet brengen, dat er aan de te doceeren stof tal van zaken vastzitten, waarvan hij moet kunnen overleggen, wat hij er van zal vertellen en wat hij er van zal verzwijgen.

Wat nu het hier te behandelen onderwerp betreft, moet natuurlijk vooraf zijn gegaan: de behandeling van den inhoud van het prisma. Nu zitten aan het spreken over een volumen-, ruimte- of inhoudsmaat en over gelijkheid van volumina enz., in 't algemeen, moeilijke kwesties vast, die men niet aan de leerlingen meedeelt. Wat men nog wel doet, is, ook voor een onmeetbare verhouding aantoonen, dat de inhouden van twee rechthoekige parallelepipeda met congruente grondvlakken zich als hun hoogten verhouden en dan komt het mij voor, dat men, ondanks het bezwaar van prof. v. d. Waerden in de noot van blz. 259, 7e jg. 1930/31, no. 6 van Euclides, zonder groot gewetensbezwaar de methode der inkrimpende intervallen kan bezigen.

Den inhoud van de pyramide heb ik steeds behandeld op de, naar ik meen, meest gebruikelijke manier (Versluys—Schogt, Knapper, Molenbroek—Wijdenes, Beth, ongeveer ook Wijdenes in zijn beknopte Stereometrie:

A. Eerst bewijzen, dat men den inhoud van een driezijdige pyramide kan beschouwen als[1]) de $\lim_{n\to\infty}$ limiet van de som van $(n - 1)$ driezijdige prisma's, die men verkrijgt, als men de hoogte in n gelijke deelen verdeelt, door de deelpunten vlakken aanbrengt evenwijdig aan het grondvlak, de doorsneden met de pyramide als bovenvlakken der prisma's en de van éénzelfde opstaande ribbe der pyramide afgesneden stukken — behalve het aan den top grenzende — als opstaande ribben der prisma's kiest. Daartoe worden ook n driezijdige prisma's beschouwd, die dezelfde doorsneden benevens het grondvlak van de pyramide tot grondvlakken hebben, terwijl de n afgesneden stukken van de reeds beschouwde opstaande ribbe telkens een opstaande ribbe van de prisma's vormen. Het aan het grondvlak der pyramide grenzende omgeschreven [2]) prisma is dan het verschil van de sommen der beide reeksen van prisma's. Dit verschil heeft bij toenemende n blijkbaar een inhoud $= 0$ tot limiet, waaruit verder in verband met het liggen van den inhoud der pyramide tusschen beide sommen de juistheid der stelling volgt.

B. Gemakkelijk blijkt dan verder, door twee driezijdige pyramiden met gelijke grondvlakken en gelijke hoogten als limieten van de sommen van $(n - 1)$ ingeschreven prisma's te beschouwen, dat die pyramiden denzelfden inhoud hebben.

C. Dan volgt, dat een driezijdige pyramide het derde deel van het driezijdig prisma is, dat het grondvlak en een opstaande ribbe er mee gemeen heeft (dit prisma in drie evengroote pyramiden verdeeld) enz.

Het voordeel van de methode is haar overzichtelijkheid, haar meetkundige aanschouwelijkheid en, eenigermate, de aansluiting aan de bepaling van het oppervlak van den cirkel, die de leerlingen in de planimetrie gehad hebben (het insluiten tusschen twee grootheden, waarvan het verschil tot nul nadert). Ik heb ook nooit de

[1]) Deze formuleering verkies ik boven: de inhoud *is* de limiet enz. Want hier heeft men te doen met een der moeilijke kwesties, boven bedoeld.

[2]) De hier gebruikte beteekenis van „omgeschreven" en „ingeschreven" zal wel niet misverstaan worden.

neiging gevoeld om het anders te doen. Bij het bewijs van de gelijkheid der twee driezijdige pyramiden, die gelijke grondvlakken en gelijke hoogten hebben, is het onhandig om — zooals ik wel eens zag — te zeggen: leg de plaatsing zoo aan, dat de grondvlakken in eenzelfde vlak komen en laat de toppen samenvallen; want dit kan tot een allerongeschiktste teekening leiden!

Er worden ook andere methoden gevolgd.

Een er van is beslist foutief (Robijns). Daar worden alleen de ingeschreven prisma's beschouwd en zonder voldoende motiveering gezegd: De inhoud van de pyramide is de grens, waartoe een aantal ingeschreven prisma's nadert, wanneer dat aantal voortdurend toeneemt. In elk geval zou er toch moeten worden aangetoond, dat er een grens *bestaat.*

Rouché et de Comberousse (ik bezit de 7e ed.) beschouwen ook alleen de ingeschreven prisma's. De hoekpunten der grondvlakken, die niet op een opstaande ribbe der pyramide liggen, zijn dan gelegen in een vlak, dat evenwijdig aan een opstaand zijvlak van de pyramide ligt en dat van deze een pyramide afsnijdt, die kleiner is dan de som der prisma's, terwijl de oorspronkelijke pyramide grooter is dan deze. Dat het verschil der pyramiden tot nul nadert, wordt — het kon wel wat vollediger, want men heeft met een nog niet behandelden inhoud te doen, nl. dien van een afgeknotte pyramide — bij deze schrijvers ontleend aan het feit dat $\frac{1}{n}$ van een opstaande ribbe der pyramide tot nul nadert.

Deze methode wordt ook door een Nederlandsch leerboek (van Thijn—Kobus) gevolgd, en daarbij kon de redeneering ook wel iets vollediger zijn. Wat mij zeker in dit leerboek niet bekoort, is, dat men C (zie boven) aan A en B laat voorafgaan, daarbij aanvankelijk B als juist *aannemende.*

In een ander Nederlandsch leerboek (Derksen en de Laive—v. d. Heuvel Rijnders) geeft men de verdeeling van de driezijdige pyramide TABC (grondvlak = G, hoogte = h), die ook reeds bij Euclides (12e boek) aangetroffen wordt. [Laat men toch altijd de gewoonte volgen om den *top* eerst te noemen]. Zijn D, E en F opv. de middens van TA, TB en TC; H, K en L die van BC, CA en AB, dan kan men TABC beschouwen als de som van de congruente pyramiden TDEF en ELBH benevens de evengroote prisma's ALKDEF en LHEKCF (het laatste is de helft van een parallele

pipedum met LHCK tot grondvlak). Men heeft nu, als P_1 de inhoud van de pyramide TDEF is,

$$TABC = 2 \times \tfrac{1}{8}Gh + 2\,P_1, \text{ waarin } \tfrac{1}{4}Gh < 2\,P_1.$$

Behandelt men P_1 als TABC, dan krijgt men (gelijkvormigheid!)

$$2 \times P_1 = 2 \times 2 \times \tfrac{1}{2^3} \times \tfrac{1}{8}Gh + 2 \times 2\,P_2, \text{ enz.}$$

Men krijgt dan, sommeerende:

$$TABC = \tfrac{1}{4}Gh + \tfrac{1}{4^2}Gh + \tfrac{1}{4^3}Gh + \ldots + \tfrac{1}{4^n}Gh + 2^nP_n,$$

waarin de laatste term weer kleiner is dan de voorlaatste. Daar $\frac{1}{4^n}Gh$ voor $n \to \infty$ tot nul nadert, nadert 2^nP_n zeker tot nul. Men krijgt dus als limiet van het laatste lid (oneindige meetk. reeks) $_{n \to \infty}$

$$\frac{\frac{1}{4}Gh}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{3}Gh.$$

Dit bewijs is voor de leerlingen zeker belangrijk minder overzichtelijk dan het eerst genoemde. Bovendien heeft men hier een algebraïsche herleiding, die men boven mist.

De redeneering, die men bij Euclides vindt, lijkt mij voor de school geenszins aan te bevelen. Belangstellenden kunnen die, behalve bij Euclides zelf (misschien heeft men, zooals ik, nog wel een oude Hollandsche vertaling in zijn boekenkast staan), lezen bij Dijksterhuis (III der hist. bibl. blz. 237 enz.) of in de Encykl. der Math. Wissensch. III 1. 2 (blz. 941 enz.).

Weber und Wellstein (II, 3e Aufl.) beschouwen $(n - 1)$ in- en n omgeschreven *rechte* prisma's en laten dan de pyramide liggen tusschen

en $$S_1 = \frac{hG}{n^3}\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\}$$

$$S_2 = \frac{hG}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

Sommatie van beide rekenkundige reeksen van de 2e orde, waarbij

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

doet dan gemakkelijk inzien, dat S_1 en S_2 voor $n \to \infty$ tot limiet $\frac{1}{3}Gh$ hebben. Echter doet zich hier het bezwaar van de sommatie van een rekenkundige reeks van de 2e orde voor. Het HBS-onderwijs bemoeit zich tegenwoordig daarmee in het algemeen niet (in mijn leerlingentijd wèl; op 't gymnasium-B deed ik het nog steeds).

Wil men dus de algemeene formule ontloopen, dan kan men de bekende listigheid bezigen:

$$(1-1)^3 = 0^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1$$
$$(2-1)^3 = 1^3 = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{op}$$
$$0 = n^3 - 3 \cdot \sum_1^n k^2 + 3 \cdot \sum_1^n k - n$$
$$3\sum_1^n k^2 = n^3 + \tfrac{3}{2} n(n+1) - n$$
$$\sum_1^n k^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Een ander bezwaar, dat Weber und Wellstein wel hadden kunnen vermijden (scheeve prisma's) is, dat het bewijs duidelijk is voor het geval, dat het voetpunt van de hoogte der pyramide binnen haar grondvlak ligt. In een ander geval, zeggen ze, kan men toch de pyramide als het verschil van twee zoodanige pyramiden beschouwen.

Vroeger (zie Euclides 4e jg. 1927/28 no. 1) heb ik bij de bespreking van een leerboek der stereometrie een alinea neergeschreven, die ik thans nog eens in herinnering breng: „Bij de bespreking van het gedeelte, dat over inhouden handelt, neemt de schr. als fundamenteele eigenschap aan: de stelling van Cavalieri. Dit zou ik nooit doen. Over die stelling met de leerlingen eens te praten, kan geen kwaad — het is zelfs voor hen, wien men de integraalrekening niet onthouden wil, hoogst wenschelijk — maar die stelling tot onvoorwaardelijken grondslag van verdere afleidingen te kiezen, behoort in een *elementair* leerboek niet plaats te hebben: „Im allgemeinen ist es aber schwer, wenn nicht unmöglich, die genauen Bedingungen anzugeben, unter denen die Formel (d.w.z. de formule, die het principe van Cavalieri inhoudt) gilt" zeggen Weber und Wellstein."

Als definitie *voorop* te stellen: Inh. ABCD $= \frac{1}{3}\, h_a G_a$, al mag ze dan ook gemotiveerd worden door het feit, dat $h_a G_a = h_b G_b = h_c G_c = h_d G_d$, wat gemakkelijk te bewijzen is, zooals Killing und Hovestadt doen (I, blz. 122), is voor *leerlingen* al even ongeschikt als een soortgelijke definitie, waarvan prof. Wolff in zijn artikel over Oppervlakken en Inhouden voor de oppervlakte van een driehoek (Euclides 9e jg. 1932/33 no. 4) uitgaat. Maar natuur-

lijk bedoelen genoemde schrijvers hun beschouwingen ook niet als bestemd te zijn voor de leerlingen.

Op het gymnasium-B kan men natuurlijk met de leerlingen integreeren. Toch moet men dit weer niet doen met verwaarloozing van eenige nauwkeurigheid der herleiding. Ik bedoel: bij het bekende dunne schijfje moet men, in het onderhavige geval, beginnen met

$$y \,.\, \Delta x < \Delta l < (y + \Delta y)\, \Delta x \text{ enz.}$$

Het uitdrukken van den inhoud van een viervlak in zijn 6 ribben komt natuurlijk als *algemeen* probleem voor de school niet in aanmerking. (Zie b.v. Versluys, Handboek der Stereometrie).

Tot slot wil ik nog eens wijzen op een onnadenkendheid, die dikwijls schrijvers van leerboeken begaan, als ze de inhoudsformule van het afgeknot driezijdig prisma, waarin de rechte doorsnede voorkomt, willen bewijzen. Ze beschouwen dan veelal (bij Schogt is dit thans geheel in orde) het lichaam als een *som* van twee lichamen van bekenden inhoud, hetgeen *niet steeds* mogelijk is. Wel is 't natuurlijk *steeds* mogelijk zoo'n lichaam als een *verschil* op te vatten. En bij de bewijzen van de inhoudsstellingen van het parallelepipedum en het prisma, waarbij de rechte doorsnede optreedt, doen zich soortgelijke onnadenkendheden voor!

VERBETERING.

Men heeft mij opmerkzaam gemaakt op eene onjuistheid in mijn artikeltje over „Een Deensch Wiskundeboek", op bladzijde 180—182 van dezen jaargang.

Niet de figuur op bladzijde 219, maar die op bladzijde 198 van jaargang VII geeft den tegenwoordigen toestand van het Deensche middelbaar onderwijs weer; aan de drie klassen van het gymnasium gaan vooraf vijf klassen der lagere school en vier klassen der tusschenschool (ook thans nog Mellemskole geheeten). De leerlingen der eerste klasse van de gymnasia zijn ongeveer 15 jaar. Op de tusschenschool wordt wiskunde gedoceerd van de tweede klasse af.

J. H. Schogt.

MÖBIUS, MEETKUNDE, EN MECHANICA

DOOR

Hk. DE VRIES.

1. In de Geschiedenis der Wiskunde uit de laatste drie eeuwen, waarmede ik mij nog al heb bezig gehouden, heb ik een paar keer namen ontmoet, die m.i. niet op de plaats staan waar zij behóóren te staan. Het meest sprekende voorbeeld hiervoor is de naam Brianchon. Zeker, Brianchon is onsterfelijk, maar deze onsterfelijkheid heeft hij uitsluitend te danken aan het theorema van de zes raaklijnen van een kegelsnede, waaraan Brianchon zelf bitter weinig waarde hechtte, en dàt dan ook inderdaad, bij manier van spreken, door een kind uit de stelling van Pascal kan worden afgeleid, nl. door polarisatie. Dat Brianchon ander, en vrij wat belangrijker, werk verricht heeft, ja, dat zijn verhandelingen uit het „Journal de l'Ecole polytechnique" den onderbouw vormen van den grooten en beroemden „Traité des propriétes projectives des figures" van Poncelet, weet nagenoeg niemand meer, hoewel Poncelet niet moede geworden is het te zeggen. [1]) Ook de mathematicus is op zijn gemak gesteld; hij vond nu eenmaal de dingen bij Poncelet, en vond het gemakkelijk ze nu ook maar aan dezen toe te schrijven, al verzekerde Poncelet zelf ook honderdmaal het tegendeel.

Maar ik wil U vandaag niet spreken over Brianchon; ik wil het hebben over het veel ingewikkelder geval Möbius. Somt men de grondleggers op van de moderne Meetkunde, dan vergeet men zeer zeker den naam Möbius niet, maar ik heb mijn leven lang den indruk gekregen dat men dezen toch altijd een weinig achter stelt bij die van Poncelet, en vooral van Steiner en Plücker. Nu had inderdaad Möbius wel niet zulk een phenomenalen synthetischen aanleg als Steiner, maar deze aanleg

[1]) Hk. de Vries: „Historische Studiën" I. Noordhoff, Groningen, 1926, p. 39.

was dan ook eenzijdig; „denn so wie Zahlen kommen, bin ich blödsinnig" placht hij van zich zelf te zeggen, en hoewel dit natuurlijk overdreven was, had hij toch inderdaad voor de analytische contrôle van zijn synthetisch verkregen vondsten de hulp van zijn vriend Schläfli uit Bern noodig. Was dus de aanleg van Steiner in één richting enorm, die van Möbius ging in allerlei richtingen, en indien iemand mocht willen beweren, dat Möbius bij Steiner niet achter staat, dan zou het mij moeilijk vallen dit tegen te spreken. Het plaatsen van Möbius op het tweede, of althans niet op het allereerste plan, heeft verschillende oorzaken. Allereerst was Möbius, in tegenstelling met Poncelet zoowel als met Steiner, een bijna overdreven bescheiden en terug getrokken geleerde, die daar in zijn ambtswoning op de Pleissenburg te Leipzig — hij was nl. zijn leven lang professor der Astronomie, en woonde als zoodanig op de sterrenwacht — een volmaakt rustig geleerdenleven leidde, zich nagenoeg niet om de buitenwereld bekommerde, ongeveer geen notitie nam van de mathematische literatuur, geheel opging in zijn eigen gedachten, en in volmaakte onverschilligheid anderen dingen liet ontdekken die hij zelf reeds bezat. Aan den weg timmeren, propaganda maken voor zich zelf, de prioriteit opeischen voor dit en voor dat, waarin Poncelet in het bijzonder een baas was, dit alles was hem volkomen vreemd; hij verlangde niet anders dan rust, en roem liet hem koud.

Maar wij moeten nog andere oorzaken aanstippen. Möbius sprak vaak, en vooral in zijn jonge jaren, een, natuurlijk door hem zelf geschapen, taal, die niet die zijner vakgenooten was, en die dezen, hoewel zij in enkele weinige uren te leeren is, weigerden zich eigen te maken, en in de tweede plaats — en de taal die hij sprak was hiervan het uitvloeisel — was zijn intiemste aanleg zóó georienteerd, dat hij Meetkunde en Mechanica, meer speciaal de Statica, niet kon, en ook niet wilde, scheiden. Sedert de dagen van Archimedes had geen mathematicus, met uitzondering wellicht van de Ceva, het zwaartepunt zóózeer lief gehad en bewonderd als Möbius; hij had er zelfs de taal op gebaseerd waarin hij zijn schoonste ontdekkingen publiceerde, nl. zijn „Barycentrischen Calcul", maar aangezien zijn tijdgenooten deze taal niet wilden leeren, konden zij ook zijn ontdekkingen niet ten volle waardeeren.

De onwil om den „Barycentrischen Calcul" aan te leeren, had

ook een principieelen ondergrond, en nooit voelt iemand zich bij een weigering zóó veilig, als wanneer hij het doet op „principieele gronden". Men vond dat bij het gebruiken van het zwaartepunt en de momentenstelling in de Wiskunde de zuiverheid der Mathesis werd aangetast, en meende op déze gronden den Barycentrischen Calcul te moeten afwijzen.

Later, bij gelegenheid van zijn „Lehrbuch der Statik", waarin de schitterendste meetkundige ontdekkingen staan, nl. het nulstelsel, de lineaire complex, en de gelijktijdig in en om elkaar beschreven lichamen, kreeg hij het met twee partijen tegelijk te kwaad; de geometers vonden het te mechanisch, en de mechanici te geometrisch, zoodat hij als het ware tusschen twee stoelen kwam te zitten, en het gevolg was dat dit prachtige boek zóó onverkoopbaar was, dat de uitgever Göschen in arren moede besloot de rest van de oplaag maar naar de papiermolen terug te zenden, en te laten instampen.

Zoo heeft men Möbius zijn leven lang een beetje in de schaduw gelaten. Mij zijn geen uitlatingen van hem bekend, waaruit men een conclusie zou kunnen trekken betreffende den indruk dien dit feit op hem gemaakt heeft; voor zoover zijn karakter mij bekend is, zou ik willen onderstellen dat hij er zich niet al te veel van aangetrokken heeft. Zijn ontdekkingen echter waren van zulk een ontzaglijk gewicht, en voor den opbouw der Meetkunde zoo absoluut onmisbaar, dat men ze met den slechtsten wil ter wereld niet kòn negeeren.

2. Na het voorgaande zal men over het boek, dat ons hier bezig houdt, en dat in 1827 verscheen, wel geen uitbundige loftuitingen verwachten; de uitbundigheid kwam pas later, toen Alfred Clebsch uit Göttingen, in zijn studie over de beteekenis van Julius Plücker (Julius Plücker's gesammelte mathematische Abhandlungen, deel I, p. XX) den „Calcul" noemde „ein niemals genug zu bewunderndes Werk, in welchem eine grosse Zahl von Fundamentalbegriffen der Geometrie zuerst ausgesprochen waren".

Meer in overeenstemming met den tijdgeest van de jaren onmiddellijk na 1827 was de recensie, die verscheen in het „Bulletin" van de Férussac, 1828, p. 77—80. Deze recensie is belangwekkend om den naam van den recensent, nl. Cauchy. Wij moeten het waardeeren dat Cauchy, een Franschman, en men weet dat de

Franschen in het algemeen niet uitblinken in de kennis van vreemde talen, te goeder trouw getracht heeft in den „Barycentrischen Calcul" door te dringen, hoewel hij er niet in geslaagd is, ten deele waarschijnlijk door de moeilijkheden van de taal, ten deele ook omdat hij te veel analyticus was om het ontzaglijke belang van M ö b i u s' ontdekkingen voor de Meetkunde ten volle te kunnen beseffen; maar wij nemen gaarne den goeden wil voor de daad.

Allereerst heeft hij het over de rekenwijze, den algorithmus, dien hij noemt „une autre méthode de géométrie analytique, dont les bases sont assurément moins simples", enz. Nu, dit laatste wagen wij te ontkennen, maar wist C a u c h y dan niets anders te zeggen dan dat het was „une a u t r e méthode de géométrie analytique"? Heeft hij dan niet gezien dat M ö b i u s hier voor de allereerste maal homogene coördinaten invoert, en konden hem, den geboren analyticus, dan de groote voordeelen van homogene uitdrukkingen en vergelijkingen verborgen blijven?

Over het tweede hoofdstuk, waarin wij de geboorte bijwonen van een geheel nieuwe Wetenschap, nl. de Verwantschapsmeetkunde, waarvan immers de projectieve slechts het eerste hoofdstuk vormt, en waarin wij ons van het begrip meetkundige verwantschap voor de eerste maal helder bewust worden, zegt hij niet anders dan: „Il faut être bien sûr qu'on fait faire à la science un grand pas, pour la surcharger de tant de termes nouveaux, et d'exiger des lecteurs qu'ils vous suivent dans des recherches, qui s'offrent à eux avec tant d'étrangeté."

Neen, de bespreking van C a u c h y was goed bedoeld, maar stond niet op het niveau van het onderwerp; daarentegen hebben zoowel S t e i n e r als P l ü c k e r herhaaldelijk en openlijk getuigd hoeveel zij aan M ö b i u s te danken hadden, en inderdaad, de leer der dubbelverhoudingen, waarop S t e i n e r de Projectieve Meetkunde heeft doen rusten, en zelfs zijn grondconstructie betreffende projectieve puntenreeksen, vond hij bij M ö b i u s!

3. Om U in de gelegenheid te stellen U zelf een oordeel te vormen over de moeilijkheden, die te overwinnen zijn bij het aanleeren van den „Calcul", wil ik nu even het beginsel uiteenzetten, waarop deze rekenwijze berust. Denk in een horizontaal vlak een willekeurigen $\triangle ABC$, en hang in de hoekpunten gewichten p, q, r op, dan grijpt de resultante $p + q + r$ van deze drie krachten aan in

een punt P van het vlak, dat gevonden wordt door de zijde AB door een punt C' zóódanig te verdeelen dat

$$AC' : C'B = q : p \quad ,$$

(waardoor het aangrijpingspunt C' van de resultante $p + q$ van p en q gevonden is), en daarna de lijn CC' door het punt P zóódanig dat

$$CP : PC' = p + q : r \quad .$$

Maar de gewichten kp, kq, kr voeren tot hetzelfde punt, en omgekeerd kan men, indien het punt P willekeurig wordt aangenomen, uit de lijnstukken die dan in de figuur voorkomen, wèl de verhoudingen van p, p, en r vinden, maar niet de gewichten zelve; ieder punt uit het vlak van $\triangle ABC$ kan dus bepaald worden door de verhoudingen van 3 getallen p, q, r, en hieruit volgt dat alle betrekkingen tusschen die getallen van dien aard moeten zijn dat zij evenredig vergroot en verkleind mogen worden, waaruit verder volgt dat die betrekkingen homogeen moeten zijn; de „Barycentrische Calcul" is dus het oudste voorbeeld van een Analytische Meetkunde met homogene coördinaten.

Natuurlijk kunnen ook negatieve coördinaten voorkomen; is bijv. $r = -(p + q)$, of $p + q + r = 0$, dan moet de kracht r naar boven werken in plaats van naar beneden. De krachten $p + q$, (in C') en $-r$ (in C), vormen dan een koppel, en P ligt in het oneindige; niets is dus eenvoudiger dan om een punt in het oneindige te krijgen: men heeft de som van de drie barycentrische coördinaten slechts 0 te stellen.

Neem een willekeurig vlak in de ruimte aan, en laat de voetpunten van de loodlijnen, uit A, B, C en P op dit vlak neergelaten, A', B', C', P', zijn, dan zegt de momentenstelling dat:

$$p \,.\, AA' + q \,.\, BB' + r \,.\, CC' = (p + q + r) \,.\, PP'.$$

Maar nu zegt Möbius het volgende. Ken ik het linker lid van deze vergelijking, dan ken ik ipso facto ook het rechter, dus kan ik dit rechter ook wel weg laten; en zie ik de letter A, dan volgt daar onvermijdelijk op de A', dus kan ik ook deze wel weg laten, en zoo blijft er van de momentenstelling niets anders over dan de simpele symbolische uitdrukking:

$$pA + qB + rC,$$

de „barycentrische uitdrukking” van een punt P. Zoo komt het, dat in den geheelen „Barycentrischen Calcul”, die toch een Analytische Meetkunde is, geen enkele vergelijking voorkomt, en de geheele Planimetrie wordt afgeleid uit de ééne uitdrukking:

$$pA + qB + rC.$$

In de ruimte heeft men natuurlijk 4 fundamentaalpunten noodig die een viervlak vormen; er komt dan een 4e coördinaat s bij, de geheele Stereometrie wordt opgebouwd op de éene uitdrukking:

$$pA + qB + rC + sD,$$

en een punt ligt in het oneindige indien:

$$p + q + r + s = 0.$$

Beperken wij ons tot de Planimetrie, dus tot de uitdrukking:

$$pA + qB + rC.$$

Deze stelt een punt voor, maar indien p, q, r functies zijn van een parameter ν, dan stelt zij, de functies éénwaardig gedacht, voor i e d e r e waarde van ν een punt voor, dus stelt zij dan een lijn voor. Zijn de functies lineair, dan is die lijn blijkbaar recht; want voor de snijpunten met AB moet $r = 0$ zijn, en dit geeft één waarde van ν, en dus slechts één snijpunt. Zijn p, q, r kwadratische functies, dan vindt men met elk van de zijden van den fundamentaaldriehoek 2 snijpunten, en heeft men dus met een kegelsnede te doen; en zoo kan men doorgaan.

Geeft men, om ons in de Planimetrie nu nog verder te beperken, en uitsluitend kegelsneden te beschouwen, aan deze een bijzondere ligging ten opzichte van den fundamentaaldriehoek, dan kan men de uitdrukking voor de kegelsnede op vele manieren wijzigen. Zoo geeft bijv. :

$$a(\nu-\beta)(\nu-\gamma)A + b(\nu-\gamma)(\nu-\alpha)B + c(\nu-\alpha)(\nu-\beta)C \quad (1)$$

een kegelsnede, die òm $\triangle ABC$ beschreven is; want voor $\nu = \alpha$ bijv. blijft er slechts over:

$$a(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)A$$

en dit is het punt A. Enz.

$$a(\nu-\alpha)^2 A + b(\nu-\beta)^2 B + c(\nu-\gamma)^2 C \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

geeft een kegelsnede, die de zijden van $\triangle ABC$ aanraakt. Want voor de snijpunten met BC bijv. moet het punt A verdwijnen, en dit

geschiedt voor $\nu = \alpha$, maar dan ook twee keer, zoodat de beide snijpunten met BC samen vallen in het punt:

$$b(\alpha - \beta)^2 B + c(\alpha - \gamma)^2 C. \text{ Enz.}$$

Intusschen bevatten de beide uitdrukkingen 1 en 2 meer willekeurige constanten of coëfficienten dan noodig is, wat soms een voordeel, soms een nadeel is; hoe dit zij, een kegelsnede, òm- of in $\triangle ABC$ beschreven, is door twee verdere gegevens bepaald, zoodat 2 willekeurige constanten voldoende zijn; en beide uitdrukkingen bevatten er 5, nl. $a : b : c, \alpha, \beta, \gamma$. Rekenenderwijze, nl. door het toepassen van bepaalde substituties, of ook door rechtstreeksch overleg, is gemakkelijk in te zien dat 1 vervangen kan worden door:

$$pxA - qx(1 - x)B + r(1 - x)C, \quad \ldots \ldots \quad 1^*$$

en 2 door:

$$p(1 - x)^2 A + qB + rx^2 C, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2^*$$

waarin nog slechts de beide constanten $p : q : r$ zitten; immers in 1* geeft $x = 0$ het punt C, $x = 1$ het punt A, en $x = \infty$ het punt B, en in 2* geeft $x = 0$ het punt $pA + qB$ tweemaal, $x = 1$ het punt $qB + rC$ tweemaal, en $x = \infty$ het punt $rC + pA$ tweemaal.

Verbindt men het raakpunt $C' = pA + qB$ op AB met C, dan vindt men de rechte lijn:

$$pA + qB + \nu C,$$

waar ν een parameter is; maar voor $\nu = r$ vindt men het bijzondere punt:

$$pA + qB + rC,$$

en deze uitdrukking, die symmetrisch is, moet men dus óók vinden indien men A met het raakpunt A' op BC, B met het raakpunt B' op CA verbindt; zóó eenvoudig blijkt hier dat de hoektransversalen naar de raakpunten met de overstaande zijden door één punt gaan. En wordt $p = q = r$, dan worden de raakpunten $A + B$, $B + C$, $C + A$ de middens van de zijden (want voor $A + B$ bijv. moet men in A en B dezelfde gewichten ophangen), en het snijpunt der drie hoektransversalen wordt $A + B + C$, dat is het zwaartepunt van $\triangle ABC$.

4. Men denke eens een vlak α, waarin een willekeurige fundamentaaldriehoek ABC ligt, en een vlak α' met een fundamentaal-

driehoek $A'B'C'$. Kiest men nu 3 barycentrische coördinaten $p : q : r$, dan wordt in het ééne vlak een punt

$$P = pA + qB + rC$$

bepaald, en in het andere een punt

$$P' = pA' + qB' + rC';$$

voegen wij deze twee punten aan elkaar toe, dan worden de punten van beide puntenvelden α en α' één-éénduidig op elkaar betrokken; *toegevoegde punten zijn dezulke met dezelfde barycentrische coördinaten.*

Dit is de oorsprong van de Verwantschapsmeetkunde. Natuurlijk had men zich, zoolang de Meetkunde bestond, met verwantschappen bezig gehouden; twee congruente, of gelijkvormige, figuren, zijn natuurlijk verwant, maar niemand had er ooit aan gedacht twee zulke figuren als onderdeelen van verwante puntenvelden te beschouwen. Men had zich door alle eeuwen heen met verwantschappen bezig gehouden, maar zonder het te beseffen, zooals men zich, mutatis mutandis, door alle eeuwen heen met getallen had bezig gehouden, zonder te weten wat het waren. Möbius is de onbetwiste schepper van de Verwantschapsmeetkunde, en zijn geheim was: het interpreteeren van één en dezelfde barycentrische uitdrukking in twee vlakken (of ruimten natuurlijk) tegelijk. Inderdaad, zijn in de uitdrukking

$$pA + qB + rC$$

p, q, r lineaire functies van een parameter v, dan doorloopen P en P' twee toegevoegde rechten; zijn de functies kwadratisch, dan twee toegevoegde kegelsneden. Enz.

Is $p + q + r = 0$, dan liggen zoowel P als P' in het oneindige; oneindig verre punten gaan dus door de verwantschap over in oneindig verre punten. Möbius toont aan, dat zijn verwantschap diegene is waarvan Euler reeds een bijzonder geval beschouwd had, nl. even bijzonder als congruente, gelijkvormige, of gelijke figuren bijzondere gevallen zijn van congruente, gelijkvormige, of gelijke velden of ruimten, en dat hij den natuurlijk niets zeggenden naam van Affiniteit gegeven had (want iedere verwantschap is natuurlijk een affiniteit); Möbius neemt niettemin dezen naam voor zijn verwantschap over, en decreteert dus dat

affiene velden of ruimten dezulke zijn die zóódanig op elkaar betrokken zijn, dat toegevoegde punten dezelfde barycentrische coördinaten hebben.

Het is natuurlijk in het minst niet noodig dat de vlakken α en α' verschillend zijn; waarom zou men $\triangle\, A'B'C'$ niet in vlak α teekenen? Dan wordt vlak α affien op zich zelf betrokken, en doet zich aldra een hoogst belangrijke vraag voor, nl. of er in dit geval figuren zijn die in zich zelve getransformeerd worden, concreter of er, indien een kegelsnede geteekend vóór ons ligt, een affiene verwantschap tusschen de punten van het geheele vlak te bepalen is zóódanig, dat het toegevoegde van ieder punt van de kegelsnede opnieuw op de kegelsnede komt te liggen, zoodat de kromme, als één geheel beschouwd, in zich zelve getransformeerd wordt. Natuurlijk zijn dan de beide fundamentaaldriehoeken in dezelfde kegelsnede beschreven, want aan het punt A bijv. ($q = r = 0$) is A' toegevoegd, enz.

Langs dezen weg weet Möbius, zoo te zeggen spelenderwijze, eigenschappen der kegelsneden af te leiden die men volstrekt niet overal tegen komt, vooral van de parabool, die zich tot deze behandeling al buitengewoon goed leent, wat een uitspraak van Gauss in het geheugen roept, die over den „Calcul" van zijn leerling Möbius zegt: „Ueberhaupt verhält es sich mit allen solchen neuen Calculs so, dass man durch sie nichts leisten kann, was nicht auch ohne sie zu leisten wäre. De Vortheil ist aber der, dass, wenn ein solcher Calcul dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse correspondiert, jeder der sich ihn ganz angeeignet hat, auch ohne die gleichsam unbewussten Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann, die dahin gehörigen Aufgaben lösen, ja selbst in verwickelten Fällen gleichsam mechanisch lösen kann, wo ohne eine solche Hülfe auch das Genie ohnmächtig wird." Deze kritiek treft de kern van de zaak vrij wat beter dan die van Cauchy.

5. Twee affiene puntenreeksen, d.w.z. dezulke wier oneindig verre punten aan elkaar zijn toegevoegd, zijn gelijkvormig, d.w.z. de verhouding der lengten van twee toegevoegde lijnstukken, zooals bijv. AB en $A'B'$, is constant; maar indien deze puntenreeksen deel uitmaken van twee affiene velden of ruimten, dan verandert de evenredigheidsfactor van geval tot geval, wat bijv. al hieraan te zien is

dat de verhouding op de zijden AC en $A'C'$ van de fundamentaal-driehoeken, nl. $AC : A'C'$, een andere is dan $AB : A'B'$. Een constante, die de geheele Affiniteit beheerscht en karakteriseert, is de verhouding van de inhouden van de beide driehoeken ABC en $A'B'C'$; de inhouden van twee toegevoegde figuren nl., hoe ook begrensd, door rechte of door kromme lijnen, verhouden zich altijd als de inhouden der $\triangle\triangle$ ABC en $A'B'C'$.

Hierbij moet echter nu een opmerking gemaakt worden die van ingrijpend belang is, nl. dat bij de lengte- zoowel als bij de inhoudsmaten gelet moet worden op het teeken. Möbius is de eerste geweest die consequent de formule:

$$AB + BA = 0, \text{ of}$$
$$BA = -AB$$

heeft toegepast, waardoor formules als:

$$AB + BC = AC$$

enz. pas algemeene geldigheid verkrijgen, en zonder welke wij ons tegenwoordig de Wiskunde niet kunnen denken, al had dan ook Poncelet in het eerste deel van zijne „Applications d'Analyse et de Géométrie", p. 493, Noot beloofd dat hij in het tweede deel van deze nieuwigheid zou bewijzen, „sinon la fausseté absolue, du moins le désaccord flagrant avec les principes mêmes de l'algèbre et de la continuité"; maar Poncelet is wel meer wat hard van stal geloopen.

Möbius had deze nieuwigheid niet het eerst bedacht. Bedacht schijnt Kästner haar reeds in 1790 te hebben, maar deze had er niet veel mee gedaan. Werkelijk ingevoerd in de Wiskunde is zij door Möbius, en deze heeft er ook zelf alle consequenties uit getrokken door ook aan de inhouden van driehoeken en viervlakken een teeken toe te kennen; vooral van de viervlakken heeft hij prachtige toepassingen gegeven in zijn „Lehrbuch der Statik", zooals wij nog zullen zien.

Möbius verzuimt niet de bijzondere gevallen uitvoerig te beschouwen die in de Affiniteit liggen opgesloten. Worden de beide $\triangle\triangle$ ABC en $A'B'C'$ gelijk van inhoud, dan krijgt men twee gelijke puntenvelden, waar de inhouden van twee toegevoegde figuren (maar niet de lengtematen van toegevoegde lijnstukken), gelijk zijn, mèt of zònder gelijkheid van teeken; worden de beide driehoe-

ken gelijkvormig, dan worden ook de puntenvelden gelijkvormig, en worden de driehoeken congruent, dan worden ook de puntenvelden congruent. Natuurlijk onderscheidt hij, juist door de teekens van de driehoeken, de directe en de indirecte congruentie, en maakt hij de opmerking dat men in het laatste geval, om dekking te krijgen, de eene figuur om een zekere lijn een hoek van 180° door de driedimensionale ruimte heen moet laten draaien; maar dan maakt hij, sprekende over hetzelfde geval in de ruimte, de volgende opmerking, waardoor hij zich helaas een ontdekking van den allereersten rang laat ontgaan. „Zur Coincidenz zweier sich gleichen und ähnlichen Systeme im Raume von drei Dimensionen: $A, B, C, D \ldots$ und $A', B', C', D', \ldots$ bei denen aber die Puncte $D, E, \ldots$ und $D', E', \ldots$ auf ungleichnamigen Seiten der Ebenen ABC und $A'B'C'$ liegen, würde also, der Analogie nach zu schliessen, erforderlich sein dass man das eine System in einem Raum von vier Dimensionen eine halbe Umdrehung machen lassen könnte. Da aber ein solcher Raum nicht gedacht werden kann, so ist auch die Coincidenz in diesem Falle unmöglich."

Deze opmerking valt te betreuren, want zij bewijst dat Möbius zich, ondanks zijn groote gaven, toch niet los wist te maken van de vooroordeelen van zijn tijd. Had hij zich maar eens, desnoods uit pure nieuwsgierigheid, afgevraagd hoe het in zulk een onmogelijke ruimte wel toe zou gaan, dan hadden wij in hem wellicht een van de grondleggers van de meerdimensionale Meetkunde mogen begroeten.

6. Möbius wist natuurlijk beter dan ieder ander dat zijn Affiniteit, waarbij het oneindige in het oneindige getransformeerd wordt, een bijzonder geval moest zijn van een nog algemeenere verwantschap, waarbij deze bijzonderheid vervalt. Hoe hij er in geslaagd is, zonder het belangrijke voordeel dat correspondeerende punten dezelfde coördinaten hebben, op te geven, ook deze algemeenere verwantschap te ontdekken, zal ik U nu in het kort uiteenzetten.

Hij acht het, zeer terecht, noodig twee inleidende paragrafen vooraf te doen gaan. In de eerste geeft hij voor de eerste maal de volledige theorie der dubbelverhouding, welke verhouding wel is waar reeds aan de Grieken bekend was, nl. in den vorm van de verhouding van de inhouden van twee rechthoeken, maar bij hen in de verste verte niet de rol speelt van tegenwoordig. Möbius

ontwikkelt de theorie volkomen, en maakt haar zoodoende pasklaar voor Steiner, die er het fundament van zijn Projectieve Meetkunde van zou maken.

In de tweede betreedt hij een totaal ander gebied, waardoor hij blijk geeft van zijn buitengewoon scherp ontwikkelden kritischen blik; deze tweede paragraaf bevat nl. een voortreffelijke verhandeling uit de theorie der irrationale getallen, lang voordat er van de theorie der puntverzamelingen sprake was, en indien Richard Dedekind en Georg Cantor deze studie, wat waarschijnlijk is, gelezen hebben, dan zijn zij er ongetwijfeld door getroffen en geïnspireerd.

Möbius neemt, behalve zijn 3 fundamentaalpunten A, B, C, nog een willekeurig vierde punt

$$D = aA + bB + cC,$$

verbindt deze 4 punten op alle manieren, snijdt de lijnen die hierdoor ontstaan met de lijnen die er reeds zijn, verbindt de snijpunten, snijdt opnieuw, verbindt opnieuw, enz. in infinitum, krijgt op deze wijze wat hij noemt een meetkundig net, en onderzoekt daar op magistrale wijze de eigenschappen van. Hij vindt, om kort te gaan, dat alle punten van het net de barycentrische uitdrukking:

$$\varphi aA + \chi bB + \psi cC$$

hebben, met φ, χ, ψ rationaal; dat omgekeerd ieder punt uit het vlak met φ, χ, ψ rationaal ook werkelijk tot het net behoort, en door een eindig aantal bewerkingen uit de 4 fundamentaalpunten is af te leiden; dat overigens die 4 fundamentaalpunten geen bijzondere rol spelen, maar door elk ander viertal punten, mits er natuurlijk geen drie op een rechte lijn liggen, vervangen kunnen worden; dat alle dubbelverhoudingen, die in het net voorkomen, rationaal zijn, nl. rationaal zijn uit te drukken in de rationale getallen φ, χ, ψ en dat alle irrationale punten, die dus niet tot het net behooren, door de rationale willekeurig dicht te benaderen zijn. U ziet, hij heeft primo gevoeld dat men onderscheid moest maken tusschen rationale en irrationale punten, en secundo bewezen dat de rationale punten „overal dicht" liggen, om de moderne terminologie te gebruiken, en kunnen dienen om de irrationale als het ware te vangen.

Nadat hij aldus zijn geweten gerust gesteld heeft, zegt hij nu als volgt. Neem in een tweede vlak een fundamentaaldriehoek $A'B'C'$ en

nog een vierde punt:

$$D' = a'A' + b'B' + c'C',$$

en voeg nu aan een punt:

$$P = \varphi aA + \chi bB + \psi cC$$

het punt:

$$P' = \varphi a'A' + \chi b'B' + \psi c'C'$$

toe; correspondeerende punten hebben dan ten minste nog dezelfde „grieksche" coördinaten, en alles blijft hetzelfde als bij de Affiniteit, maar . . . . als:

$$\varphi a + \chi b + \psi c = 0$$

wordt, en dus P in het oneindige ligt, dan behoeft natuurlijk:

$$\varphi a' + \chi b' + \psi c'$$

geenszins nul te zijn, zoodat P' in het algemeen een eindig punt is.

Möbius zat verlegen om een naam voor deze nieuwe verwantschap. „Wel", zei zijn vriend en collega Weiske, „als 4 punten op een rechte lijn liggen, collinear, dan doen de 4 toegevoegde punten dit ook; noem de verwantschap dus *Collineatie*." En aldus is geschied.

Möbius laat zien — om slechts één belangrijke greep te doen, dat collineaire, of zooals wij tegenwoordig zeggen projectieve, puntenreeksen te completeeren zijn, nadat 3 paar toegevoegde punten gegeven zijn, door ze perspectivisch te maken, hetgeen gelukt door twee toegevoegde punten op elkaar te leggen; d.w.z. hij leert Jacob Steiner zoo in het voorbijgaan even één van diens grondconstructies uit de „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander". Steiner doet het wel is waar een ideetje anders, en beter, maar Möbius kon het al in 1827, terwijl het boek van Steiner pas in '32 verscheen.

Dit is een belangrijke, en principieele, kwestie, want er volgt uit dat er geen essentieel verschil bestaat tusschen projectieve en perspectieve reeksen; projectieve reeksen zijn eenvoudig vroeger eens perspectivisch geweest, maar in een algemeenere positie ten opzichte van elkaar gebracht. Möbius, „der scharfsinnige", of ook wel der „erfinderische", zooals Steiner hem bewonderend noemt, vroeg zich af of deze uitkomst algemeen is, of bijv. twee

collineaire puntenvelden óók beschouwd kunnen worden als dezulke die in hun jeugd perspectivisch geweest zijn, maar uit elkaar zijn geraakt, en hij verschaft zich zekerheid door de beide vierhoeken *ABCD* en *A'B'C'D'*, voor de allereerste maal in de Wiskunde, perspectivisch te maken, en wel op oneindig veel manieren als de vlakken verschillend zijn, en altijd nog op 4 manieren als de vlakken moeten samenvallen; een magistraal stuk werk.

7. In het derde, en laatste, hoofdstuk van den Calcul houdt Möbius zich uitvoerig bezig met de Leer der Kegelsneden, maar men zou zich zeer vergissen als men onderstelde dat hij hier langs plat getreden paden wandelt; „cet ouvrage, où tout est nouveau, aussi bien la forme que le fond, les idées aussi bien que les notations et les termes", klaagt immers reeds Cauchy, en hij sloeg den spijker precies op den kop.

Juist dit door Cauchy zoo goed gevoelde nieuwe en ongewone maakt den „Calcul" zoo buitengewoon aantrekkelijk, maar verleent hem ook zoo'n ontzaglijke paedagogische waarde, omdat hij ons de Analytische Meetkunde van Plücker zoo oneindig beter doet begrijpen. Wat is leerrijker dan in te zien dat iets zóó kan, maar ook wel anders kan, en dat de ééne manier van doen déze, en de andere weer die voor- en nadeelen heeft?

Möbius leidt in dit hoofdstuk de eigenschappen der middelpunten, toegevoegde middellijnen, asymptoten, enz. enz. af, en geeft dan de volledige polarentheorie, door eenvoudig over te gaan op een veld, dat met het eerste collineair is. En hij vindt het theorema van Simson over den in- en omgeschreven vierhoek, de stelling van Carnot uit de transversalentheorie, de stellingen van Ceva en Menelaos, de stelling van Pascal, die hij in zijn onschuld nog aan Simson toeschrijft, het theorema van Brianchon, de stelling van Desargues over perspectieve driehoeken, de involutie van 6 punten, die door de zijden van een volledigen vierhoek op een rechte lijn wordt ingesneden, en ontwikkelt, volmaakt onafhankelijk van Poncelet, diens „théorie des polaires réciproques"; en eindelijk ontdekt hij in de eenzaamheid en de rust van zijn studeerkamer, ganschelijk onkundig van het twistgeschrijf tusschen Gergonne en Poncelet, dat de fransche tijdschriften ontsierde, het groote dualiteitsbeginsel der Meetkunde, waarvan hij, evenals later Plücker, het algebraische bewijs ziet in het feit dat

in de icidentiebetrekking punt-lijn, d.w.z. dat een punt op een rechte ligt, of omgekeerd de rechte door een punt gaat, de coördinaten zoowel van het punt als van de rechte symmetrisch optreden. Clebsch had inderdaad gelijk; den „Calcul" kan men nooit genoeg bewonderen, want daarin worden vele, en de allerbelangrijkste, fundamentaalbegrippen der Geometrie voor de eerste maal uitgesproken.

8. Ik mag niet eindigen alvorens met een enkel woord het „Lehrbuch der Statik" gememoreerd te hebben, dat in 1837 verscheen, waarvan ik U het droeve lot al heb meegedeeld, en waarin óók alweer een meetkundige ontdekking van den allereersten rang voorkomt; over zijn werkzaamheid als astronoom — hij is immers zijn leven lang professor der Astronomie geweest, en heeft als zoodanig tal van verhandelingen, en zelfs een uitvoerig leerboek der „Mechanik des Himmels" gepubliceerd, — past het mij, als leek, te zwijgen.

In de jaren 1829 en 1831 had hij twee kleine opstellen gepubliceerd, die als het ware het verschijnen van het groote leerboek voorbereiden. In het eerste interpreteerde hij voor de eerste maal, uitgaande van de overweging dat in het platte vlak het moment van een kracht PQ ten opzichte van een punt O gelijk is aan den dubbelen inhoud van $\triangle\ OPQ$, voorzien van het behoorlijke teeken, het moment van een kracht PQ in de ruimte ten opzichte van een as, die de kracht kruist, als het zesvoud van den inhoud van het viervlak, waarvan de kracht zelve, en een eenheidsvector, uitgezet op de as, overstaande ribben zijn; natuurlijk óók weer met het behoorlijke teeken. Zal dus het moment nul zijn, dan moet de as de kracht snijden, en omgekeerd.

Een krachtenstelsel in de ruimte laat zich volgens Poinsot (zie hieronder) op oneindig veel manieren reduceeren tot 2 elkaar kruisende resultanten; door middel van zijn nieuwe interpretatie der momenten bewijst hij nu op verbluffend eenvoudige wijze het fraaie theorema van Chasles dat, hoe ook het krachtenstelsel tot 2 resultanten moge worden terug gebracht, de inhoud van het viervlak, waarvan die 2 resultanten overstaande ribben zijn, constant is.

Möbius had, volgens zijn eigen woorden met bijzonder veel genoegen, kennis gemaakt met het klassieke boekje uit 1806 van Poinsot „Elémens de statique", waarin de schrijver naast tal van andere nieuwigheden zijn ontdekking van de koppels, „couples"

genaamd, wereldkundig maakt; M ö b i u s maakt er zich met enthousiasme meester van, doopt ze „Kräftepaare", en leidt er in zijn stukje van 1831 op eenvoudige wijze de bekende evenwichtsvoorwaarden voor een krachtenstelsel mee af.

In het „Lehrbuch" nu vindt men dit alles natuurlijk, in de uitvoerigheid die toen mode was, terug, maar men vindt er tevens de volgende geniale ontdekking.

Is een krachtenstelsel op de een of andere wijze terug gebracht tot twee elkaar kruisende resultanten PQ en RS, en is de stelling bewezen dat de som der momenten van alle krachten ten opzichte van een willekeurige as, elk moment, dat wil dus zeggen elk viervlak, voorzien van het behoorlijke teeken, gelijk is aan de som der momenten van de beide resultanten, dan behoeft men slechts over die resultanten een overlijn te leggen om te ontdekken dat er assen zijn voor welke de som dier momenten nul is, zoogenaamde „nulassen"; wat is er nu wel te vertellen van de verzameling van alle nulassen der ruimte? (Het zal onnoodig zijn te vermelden dat men in plaats van nul ook wel een constant getal k kan nemen).

De nulassen der ruimte vormen, in overeenstemming met het feit dat het aantal rechten der ruimte ∞^4 is, en aan een nulas slechts één voorwaarde wordt opgelegd, een stel ∞^3, dat veel later door P l ü c k e r een „stralencomplex" genoemd zou worden; het is een lineaire complex, het eenvoudigste, maar misschien wel het interessantste, en zeker het belangrijkste voorbeeld.

De nulassen door een punt liggen in een vlak door dat punt, het „nulvlak" π van P, en de nulassen in een vlak gaan door een punt van dat vlak, het „nulpunt" P van π. Maar hierdoor werd, zoo te zeggen, automatisch, een reciprociteit tusschen de punten en vlakken der ruimte geschapen, zooals de wereld nog nooit had aanschouwd; want door een kwadriek wordt wel is waar óók aan ieder punt een vlak toegevoegd, nl. het poolvlak, maar slechts voor de punten van de kwadriek zelve ligt de pool in zijn poolvlak, terwijl dit in het „nulstelsel" van M ö b i u s stééds het geval is.

Wij weten tegenwoordig dat de bestaansmogelijkheid van het nulstelsel afhangt van het n i e t nul zijn van een scheef symmetrischen determinant; deze nu is in R_3 van den graad 4, en dus niet nul, maar in het platte vlak van den graad 3, en dus wèl nul, want scheef symmetrische determinanten van oneven graad zijn nul; vandaar dat slechts in R_3 een nulstelsel van M ö b i u s mogelijk is,

maar niet in R_2, en in het algemeen is het slechts mogelijk in een ruimte met een oneven aantal afmetingen.

Möbius behandelt het nulstelsel en den lineairen complex, men mag wel zeggen compleet. Twee bij elkaar behoorende resultanten van het krachtenstelsel zijn zoogenaamde toegevoegde rechten t.o.v. den complex, zooals er ook toegevoegde rechten t.o.v. een kwadriek zijn: de nulvlakken van de punten der eene gaan door de andere; natuurlijk, want de nulassen door de punten der eene moeten immers de andere snijden. De nulassen zelve zijn t.o.v. den complex aan zich zelf toegevoegd, en twéé paar toegevoegde rechten liggen steeds op een hyperboloïde.

Denk het vlak α_∞, met zijn nulpunt A_∞; de toegevoegde rechten van de rechten uit α_∞, maar niet door A_∞, gaan door A_∞, maar liggen niet in α_∞, komen dus in het eindige, zijn alle evenwijdig, en worden de middellijnen van den complex genoemd. Onder deze is er één die de „as" genoemd wordt; haar toegevoegde rechte is de oneindig verre rechte uit een vlak loodrecht op de as. En als men nu van 2 paar toegevoegde rechten, dus resultanten, de kortste afstanden construeert, en van deze kortste afstanden wéér den kortsten afstand, dan heeft men de as. En als men nu den geheelen complex, dus met nulstelsel en al, hetzij een translatie geeft in de richting van zijn as, of een rotatie om die as laat uitvoeren, of dus een willekeurige schroefbeweging meedeelt, dan verplaatst de complex zich in zich zelf en zal dus een complexstraal nooit samen vallen met een lijn die niet tot den complex behoort.

9. Dat een zekere verwantschap wèl mogelijk was in de ruimte, en niet in het platte vlak, was op zich zelf al onverwacht genoeg, en deze verwantschap bleek nog groote verrassingen te kunnen openbaren ook.

Denken wij eens een viervlak *ABCD*, en van de 4 hoekpunten de nulvlakken α, β, γ, δ; deze vormen een tweede viervlak, en aangezien de zijvlakken van dit tweede door de hoekpunten van het eerste gaan, is het tweede òm het eerste beschreven. Maar het punt $\alpha\beta\gamma$ is een hoekpunt van het tweede, en tegelijk het nulpunt van vlak *ABC*, dus ligt het in vlak *ABC*. De hoekpunten van het tweede liggen dus ook in de zijvlakken van het eerste; genoeg, beide viervlakken zijn gelijktijdig in en om elkaar beschreven.

Het is duidelijk dat men het niet bij viervlakken hoeft te laten.

Dompelt men bijv. een achtvlak onder in een nulstelsel, en bepaalt van de hoekpunten de nulvlakken, dan ontstaat een lichaam, dat gelijktijdig in en om het achtvlak beschreven, maar niet opnieuw een achtvlak is, maar een zesvlak, met 8 hoekpunten. Zoo kan een 12-vlak gelijktijdig in en om een twintigvlak beschreven worden, enz., maar het geval van de viervlakken is het eenig symmetrische en daarom het opvallendst.

Möbius heeft deze vondst reeds wereldkundig gemaakt in 1828, in Crelle III, p. 273—278, in een kort opstel, dat tot titel heeft: „Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heissen?" Hij verzwijgt hierin den mechanischen oorsprong, behandelt het vraagstuk met den „Barycentrischen Calcul", en bewijst op uiterst elegante wijze dat van de 8 voorwaarden waaraan voldaan moet worden (ieder hoekpunt in een zijvlak van het andere lichaam) slechts 7 van elkaar onafhankelijk zijn. En daarna leert hij ons, door middel van 2 projectievlakken, gelijktijdig in en om elkaar beschreven viervlakken op frappant eenvoudige wijze construeeren. En het verrassende van de zaak is, dat de heele figuur bestaat uit twee, in de projectievlakken gelegen, volledige vierhoeken, die op de as van projectie dezelfde involutie van zes punten insnijden.

Daar het bestaan van gelijktijdig in en om elkaar beschreven figuren samenhangt met het nulstelsel, is het meer dan waarschijnlijk dat zij in het platte vlak onmogelijk zijn; Möbius bewijst dit uitdrukkelijk. Gelijktijdig in en om elkaar beschreven driehoeken bijv. zijn slechts mogelijk in gedegenereerden vorm. Verbindt men den top A van een driehoek met twee punten B' en C' van de basis, dan zijn ABC en $AB'C'$ inderdaad in en om elkaar beschreven, maar zóó bedoelen wij het niet.

10. Ik moet eindigen; maar één opmerking moet ik nog maken. Bestudeert men de theorie der functies van een complexe veranderlijke z, dan geeft $w = f(z)$ een conforme afbeelding, en de gebroken lineaire substitutie:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

in het bijzonder een verwantschap, waarbij cirkels in cirkels overgaan; maar de cirkelverwantschap was reeds, lang vóór de functietheorie, door Möbius langs zuiver meetkundigen weg ontdekt.

Over de merkwaardige polyeders van Möbius zal ik niet spreken.

De groote meesters, op welk gebied van Wetenschap of Kunst ook, met piëteit te gedenken, en te trachten zich hun gedachtenwereld, voor zoover mogelijk, eigen te maken, is zuiver genot, en in den tegenwoordigen tijd een groote troost. Möbius wàs een van dezen. En ik hoop dat U het eens zult zijn met zijn vriend en biograaf Richard Baltzer, die van hem getuigde: „Möbius", de astronoom, „war ein hervorragender Mathematiker deutscher Nation, und ein hervorragender Geometer aller Nationen."

---

8. DE INDIRECTE METHODE VOOR ONEINDIGE PROCESSEN.

8. Voor de behandeling van oneindige processen, die in de tegenwoordige wiskunde tot toepassing van de theorie der convergente varianten aanleiding geven, doordat een te berekenen grootheid als limiet van een variant gevonden wordt, gebruikt Archimedes een door Eudoxos ingevoerde methode, die we door de uitdrukking „indirecte limietovergang" meer kort dan juist zullen kenmerken. Den veel gebruikten term „exhaustiemethode" zullen we vermijden; voor een redeneering, die ontstaan is uit het besef van het inexhaustibele, het onuitputtelijke, van het oneindige, is het wel de slechtste naam, dien men kon bedenken.

8,1. De indirecte methode van Eudoxos, waarvan den lezer van Euclides uit het twaalfde Boek der *Elementen* toepassingen bekend zullen zijn in de berekening van oppervlakten en inhouden, komt bij Archimedes voor in problemen van dezelfde soort als deze. Men treft haar echter aan in verschillende vormen, die we terugbrengen tot twee hoofdtypen.

8,20. I. *DE COMPRESSIEMETHODE.* Hierbij wordt de te berekenen grootheid Σ ingesloten tusschen een monotoon stijgende benedenste grens I_n en een monotoon dalende bovenste grens C_n; van die grenzen is bekend:

α) dat het verschil C_n—I_n door keuze van n kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven grootheid ε.

òf β) dat de verhouding (C_n, I_n) door keuze van n kleiner kan worden gemaakt dan de verhouding van de grootste μ van twee willekeurig voorgeschreven grootheden tot de kleinste ν.

De berekening bestaat nu hierin, dat een grootheid K wordt bepaald, die voor iedere waarde van n tusschen I_n en C_n ligt. De bewering is nu

$$\Sigma = K$$

8,21. De onderscheiding der gevallen α) en β) leidt tot een splitsing van het type I in twee ondertypen:

I α. *de verschilvorm der compressiemethode.*

I β. *de redenvorm der compressiemethode.*

De bewijzen der gelijkheid $\Sigma = K$ zijn voor deze twee ondertypen eenigszins verschillend.

Voor beide is gegeven: voor iedere waarde van n gelden de ongelijkheden:

$$I_n < \Sigma < C_n \qquad (1)$$
$$I_n < K < C_n \qquad (2)$$

Het bewijs verloopt nu als volgt:

Ia. Verschilvorm.	Iβ. Redenvorm.

Stel, dat de gelijkheid $\Sigma = K$ niet geldt, dan is òf $\Sigma > K$ òf $\Sigma < K$.

Geval I. Zij $\Sigma > K$. Bepaal nu n zoo, dat

$C_n - I_n < \Sigma - K$	$(C_n, I_n) < (\Sigma, K)$

Dan is wegens $\Sigma < C_n$ (1) a fortiori

$\Sigma - I_n < \Sigma - K$	$(\Sigma, I_n) < (\Sigma, K)$

dus is $K < I_n$ in strijd met het ondersteld (2).

Geval II. Zij $\Sigma < K$. Bepaal nu n zoo, dat

$C_n - I_n < K - \Sigma$	$(C_n, I_n) < (K, \Sigma)$

Dan is wegens $I_n < \Sigma$ (1) a fortiori

$C_n - \Sigma < K - \Sigma$	$(C_n, \Sigma) < (K, \Sigma)$

dus is $C_n < K$ in strijd met het onderstelde (2).

Dus is $\Sigma = K$.

8,22. In moderne symboliek uitgedrukt luidt de conclusie als volgt:

Is voor iedere waarde van n

$$I_n < \Sigma < C_n \quad \text{èn} \quad I_n < K < C_n$$

met òf $\lim\limits_{n \to \infty} (C_n - I_n) = 0$ òf $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{C_n}{I_n} = 1$.

dan is $\Sigma = K$.

8,23. De toepassingen der methode verschillen onderling natuurlijk in de bepaling van K. Hiervoor is geen algemeene regel te formuleeren.

Zijn echter eenmaal de ongelijkheden (1) en (2) geverifieerd, dan volgt automatisch het verdere verloop van het bewijs, dat echter niettemin telkens weer in extenso wordt gegeven.

8,24. Men vindt toepassingen van de compressiemethode:
in den verschilvorm:

D.C. 1. **C.S.** 22, 26, 28, 30. **Spir.** 24, 25. **Q.P.** 16 **Meth.** 15.
in den redenvorm:

S.C. I, 13, 14, 33, 34, 42, 44.

8,30. II. *DE APPROXIMATIEMETHODE.*

Hierbij wordt de te berekenen grootheid Σ van den kleinen kant af benaderd door de som S_n van n (positieve) termen $a_1, a_2 \ldots a_n$ van een convergente oneindige reeks, waarbij bekend is, dat $\Sigma - S_n$ door keuze van n kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven grootheid ε, terwijl het zelfde van a_n geldt (de facto volgt dit natuurlijk uit het aangaande S_n onderstelde). De berekening bestaat in de bepaling van een grootheid K, die voor iedere waarde van n voldoet aan een betrekking

$$a_1 + \ldots\ldots a_n + R_n = K \qquad (1)$$

waarin $R_n < a_n$

Te bewijzen is nu $\Sigma = K$

Bewijs. Stel, dat deze gelijkheid onjuist is, dan is òf $\Sigma > K$ òf $\Sigma < K$.

Geval I. Zij $\Sigma > K$. Bepaal nu n zoo, dat

$$\Sigma - S_n < \Sigma - K$$

dan is $K < S_n$ in strijd met (1)

Geval II. Zij $\Sigma < K$. Bepaal nu n zoo, dat

$$a_n < K - \Sigma$$

Wegens (1) is nu

$$K - S_n < a_n < K - \Sigma$$

dus $\Sigma < S_n$ in strijd met het aangaande Σ en S_n ondersteIde.

8,31. In het eenige voorbeeld van deze methode, dat in de werken van Archimedes voorkomt (de bepaling van de oppervlakte van een paraboolsegment, **Q.P.** 18—24) is de reeks $a_1, a_2 \ldots\ldots$ een afdalende meetkundige reeks. Dat $\Sigma - S_n$ door keuze van n kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven grootheid, wordt gewaarborgd door het lemma van Euclides (X, 1);

waarin wordt uitgesproken, dat, wanneer men van een grootheid meer dan de helft afneemt, van de rest opnieuw meer dan de helft enz., er ten slotte een grootheid overblijft, die kleiner is dan een willekeurig voorgeschreven grootheid. Men heeft dus slechts te zorgen, dat

$$\begin{aligned} &\Sigma && > a_1 > \tfrac{1}{2}\Sigma \\ &\Sigma - a_1 && > a_2 > \tfrac{1}{2}(\Sigma - a_1) \\ &\Sigma - (a_1 + a_2) && > a_3 > \tfrac{1}{2}[\Sigma - (a_1 + a_2)] \qquad \text{enz.} \end{aligned}$$

wat natuurlijk langs meetkundigen weg moet worden ingezien.

Dat a_n door keuze van n kleiner dan ε kan worden gemaakt, blijkt door te bewijzen, dat de reden der meetkundige reeks kleiner is dan ½; daardoor wordt het lemma van Euclides van toepassing op de opvolgende termen der meetkundige reeks. Dat $R_n < a_n$ blijkt door te bewijzen $R_n = \lambda\, a_n$ $(0 < \lambda < 1)$

8,32. In moderne formuleering komt de methode hierop neer, dat men meetkundig inziet

$$\Sigma = \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \dots . a_n)$$

en nu arithmetisch de waarde K van deze limiet bepaalt.

9. NEUSISCONSTRUCTIES.

9. De Grieksche wiskunde maakt niet zelden gebruik van een constructie, die als neusis (νεῦσις) wordt aangeduid en die hierin bestaat, dat door een gegeven punt een rechte moet worden getrokken, waarvan twee gegeven krommen een lijnstuk van gegeven lengte afsnijden. Hoewel als letterlijke vertaling van den term wellicht het meest „neiging" in aanmerking zou komen (het afgesneden lijnstuk, is, verlengd, geneigd naar, d.w.z. gericht op het gegeven punt) wordt de wiskundige inhoud van het begrip beter uitgedrukt door het woord „inschuiving": men kan zich nl. de constructie zoo uitgevoerd denken, dat een lineaal, waarop het gegeven lijnstuk door twee merkteekens is afgezet, door het gegeven punt wordt gelegd en nu zoo lang wordt verschoven, totdat de twee teekens op de gegeven krommen liggen.

We vermelden hier de op een neusis berustende hulpstellingen, die Archimedes in zijn werken noodig zal blijken te hebben. In alle zij K centrum van een cirkel, waarvan $A\Gamma$ raaklijn of koorde is.

Door K moet nu een halve rechte worden getrokken, die den cirkel in B en de rechte $A\Gamma$ in E ontmoet, zoodat BE telkens aan een voorgeschreven betrekking voldoet. Zij telkens KP de diameter parallel aan $A\Gamma$, R de straal van den cirkel.

9,1. **Spir.** 5. (fig. 45).

$A\Gamma$ raakt den cirkel in Γ. Geeischt wordt

$$(BE, R) < (\text{bg } B\Gamma, \text{gegeven cirkelomtrek}).$$

Is Δ een lijnstuk grooter dan de gegeven cirkelomtrek (het be-

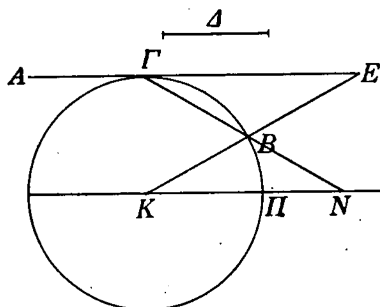


Fig. 45.[1]

staan van Δ wordt in **Spir.** 3. nog nader betoogd, door op te merken, dat men hiervoor slechts een lijnstuk behoeft te nemen grooter dan de omtrek van een omgeschreven polygoon), dan is voldoende

$$(BE, R) < (\text{bg } B\Gamma, \Delta).$$

Neusis: Schuif tusschen den cirkel en den diameter KP een lijnstuk BN in, gericht op Γ en gelijk aan Δ, dan is

$$(BE, R) = (B\Gamma, BN) < (\text{bg } B\Gamma, \Delta).$$

9,2. **Spir.** 6. (fig. 46).

$A\Gamma$ is een koorde met midden Θ. E moet tusschen A en Γ liggen. Z en H zijn twee lijnstukken, voldoende aan

$$(Z, H) < (\Gamma\Theta, K\Theta).$$

Geeischt wordt

$$(BE, B\Gamma) = (Z, H).$$

Neusis: Schuif tusschen den cirkel en den diameter KP een

[1]) Voor Π te lezen P.

lijnstuk BN in, dat door Γ gaat en dat voldoet aan de betrekking

$$(Z, H) = (BK, BN)$$

door welke betrekking BN bepaald is. Blijkbaar is nu

$$(BE, B\Gamma) = (BK, BN) = (Z, H).$$

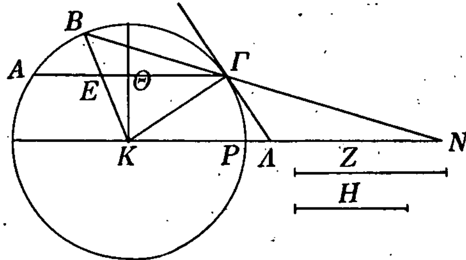


Fig. 46.[1])

Snijdt de raaklijn in Γ de rechte KP in Λ, dan is

$$(Z, H) = (BK, BN) = (K\Gamma, BN) < (K\Gamma, \Gamma\Lambda) = (\Gamma\Theta, K\Theta) \quad (1)$$

De aan (Z, H) opgelegde voorwaarde is dus noodig. Dat ze voldoende is, wordt door Archimedes blijkbaar gewaarborgd geacht door de opmerking, dat, als aan (1) voldaan is, BN grooter is dan $\Gamma\Lambda$. Vermoedelijk ligt hieraan een continuiteitsbeschouwing ten grondslag: BN nadert tot $\Gamma\Lambda$, wanneer B over de kromme nadert tot Γ. Het ware namelijk denkbaar, dat het verschil $BN - \Gamma\Lambda$ steeds boven een zekere grens zou blijven, in welk geval de voorwaarde $BN > \Gamma\Lambda$ niet voldoende zou zijn, om ook tot $\Gamma N > \Gamma\Lambda$ en daardoor tot de construeerbaarheid van ΓN te besluiten. Dergelijke continuiteitsbeschouwingen kwamen echter in de officieele wiskunde der Grieksche publicaties niet voor; er blijft daardoor hier, evenals op enkele andere dergelijke plaatsen, een leemte in het bewijs.

9,3. **Spir.** 7. (fig. 47).

Het verschil met 9,2 is alleen, dat E nu op het verlengde van $A\Gamma$ moet liggen en dat aan (Z, H) nu de voorwaarde is opgelegd

$$(Z, H) > (\Gamma\Theta, K\Theta).$$

Neusis: Schuif tusschen den cirkel en den diameter KP een lijnstuk BN in, gericht op Γ en voldoende aan de betrekking

$$(Z, H) = (BK, BN)$$

door welke betrekking BN bepaald is.

[1]) De letters Z en H te verwisselen.